PROBLEMI

PER GLI AGRIMENSORI

CON VARIE SOLUZIONI

DELL' AB.

LORENZO MASCHERONI

PROF. DI GEOMETRIA E ALGEBRA NELLA R. I. UNIVERSITA' DI PAVIA, DELL' ACCADEMIA DI PADOVA, DELLA REALE DI MANTOVA, E UNO DE' QUARANTA DELLA SOCIETA' ITALIANA.

IN PAVIA MDCCXCIII.

Presso Baldassare Comino.

Con permissione.

ALL' ILLUSTRISSIMO SIGNORE

IL SIG.

DON POMPEO SIGNORINI

R. CONSIGLIERE, E REFERENTE
DEGLI AFFARI ECCLESIASTICI
E DEGLI STUDJ
PRESSO LA
R. CONFERENZA GOVERNATIVA

Non guardate, vi prego, Illustrissimo Signore, alla tenuità del libro che vi offro. Presso voi lo raccomandi quello zelo, che ve lo presenta.

Presso il pubblico sarà raccomandato dall' onore del favor vostro. E perchè non mi prometterei io pienamente tutto il vostro favore? L' acume, e la penetrazione del vostro ingegno vi fa riconoscere l' importanza anche dei piccoli oggetti, che hanno però talvolta non piccola influenza nel progresso de' buoni studj; e la nobiltà del vostro animo v' impegna sempre più a secondare que' benefici genj Sovrani, all' ombra de' quali è tanto cresciuta in ogni sua parte questa fiorentissima Università. Ho l' onore di essere

Di V. S. Illustrissima

Umil.mo Dev.mo Obbl.mo Servidore
LORENZO MASCHERONI.

ALL' UMANISSIMO LETTORE

Brevemente ti rendo ragione perchè io dia in luce questi Problemi. Benchè essi in gran parte sieno comuni; pure trovandomi io aver notate presso di me alcune loro soluzioni, che non erano comuni, e potevano essere utili; mi è sembrato ben fatto di pubblicarle. A questo pensiero è succeduto l' altro di unire sotto lo stesso Problema tutte le soluzioni, che mi erano note. Così, io dissi, l' agrimensore avrà in un solo libretto molte e varie maniere di ottenere lo stesso risultato, nè vi mancheranno anche le più ovvie. Non vi ho aggiunte le dimostrazioni. Esse o sono facili, o possono dar occasione d' esercizio nel ritrovarle.

Io aveva pubblicato nel 1787. tra le aggiunte al Corso di Matematica di M. Bossut, di cui mi servo per testo nelle mie lezioni in questa R. I. Università, un mio opuscolo col titolo: *Metodo di misurare i poligoni piani*; e vi posi il mio nome. Due anni dopo in Ginevra il Sig. Lhuilier ha pubblicata la sua Poligonometria presso Barde 1789. Io riconobbi nel leggere questo libro non solo che il mio metodo conteneva tutti i suoi problemi, ma inoltre, che io nelle soluzioni analitiche presentava le stesse formole, e camminava sulle stessissime tracce di un autore che aveva stampato il suo libro due anni dopo il mio: ed ebbi in vero maraviglia nel vedermi coincidere in tal modo con quel Matematico. Quì avrai tutti quegli stessi problemi colle formole che ne danno la soluzione, e con quelle stesse regole o canoni generali, che allora pubblicai. Non ostante ciò, merita ancora il libro di M. Lhuilier, che tu te ne prevalga sì

per l'erudizione, che per le dimostrazioni geometriche da lui aggiunte, come pure per la copia e bellezza degli esempj, che rischiarano tutto il metodo.

Quì sono due aggiunte. La prima è l'applicazione delle regole della poligonometria alla misura di lati e di angoli in certi sistemi di linee rette poste successivamente ad angolo una presso l'altra, finchè l'ultima finisca al principio della prima, senza però che si abbia un poligono. Credo che questa applicazione sarà utile nel calcolo dei triangoli, che si formano dai Geografi per levar le carte delle provincie e per segnare i meridiani.

La seconda è un saggio di poligonometria solida ricavata dalla piana. Io m'era avvenuto nella soluzione dei Problemi VII. e VIII. del libro V. sulla solidità della piramide, quando vidi gli stessi risultati in una memoria dell' immortal Eulero nei nuovi

commentarj di Pietroburgo T. IV. 1758. Non perchè io cerchi di conservare il mio, non riconoscerò l'altrui con piacere.

Troverai poi sciolto in generale il problema della solidità d'un poliedro che ha per basi due facce parallele poligone, e le altre quadrilatere poste comunque intorno ai lati di queste basi; il qual problema io credo di aggiungere adesso per la prima volta con qualche vantaggio alla tuttora assai mancante dottrina de' solidi.

Ho fatto riflessione, che mancando le dimostrazioni, era necessario che tu fossi tanto più sicuro della correzione del libro. Questa spezialmente coll' ajuto dell' errata si è da me procurata totale. Aggradisci la premura di servirti, e vivi felice.

LI-

LIBRO PRIMO

Della misura delle linee.

Problema I.

Misurare una distanza A B *accessibile nei soli due estremi* A, *e* B.

Soluzione 1. Preso qualche punto C, dal quale si possa andare in A, e B cioè misurare le rette CA, CB e portata sulla continuazione della AC la CD, che le sia uguale, e parimente sulla continuazione della BC la CE sua eguale, si avrà $DE = AB$. Fig 1

2. Preso colla stessa condizione un punto C, e portata sulla continuazione della AC la $CE = BC$, e sulla continuazione della BC la $CD = AC$; si avrà $DE = AB$. Fig 2

3. Se da un punto V si potrà andare in A e in B, e se prendendo $VC = VA$, anche da C si potrà andare in A; si avrà Fig 3

$$AB = \sqrt{\left(AC^2 \frac{VB}{VC} + BC^2 \right)}$$

4. Se dal punto V si potrà andare in A, e B, e se prendendo sopra le VA, VB le VD, VE si potrà andare da D in E; si avrà $AB =$ Fig 4

$$\sqrt{\left[AV^2 + BV^2 - \frac{AV.BV}{DV.EV}(DV^2 + EV^2 - DE^2)\right]}$$

5. Se nel triangolo AVB si potranno misurare due angoli e il lato AV, si avrà

Fig 4

$$AB = AV \frac{\text{sen. } V}{\text{sen. } B}$$

Se si potranno misurare due angoli e il lato BV; si avrà $AB = BV \frac{\text{sen. } V}{\text{sen. } A}$

6. Se si potrà misurare l'angolo V, e i due lati AV, BV; ri avrà

$$AB = \sqrt{(AV^2 + BV^2 - 2\,AV.\,BV.\cos.\,AVB)}$$

Si potrà ancora trovare AB in questa maniera. Coll' equazione tang. $\frac{A-B}{2}$ = $\frac{BV - AV}{BV + AV}$ tang. $\frac{A+B}{2}$ si verrà a conoscere tang. $\frac{A-B}{2}$, e per conseguenza $\frac{A-B}{2}$; la quale semidifferenza degli angoli VAB, VBA aggiunta alla semisomma $\frac{A+B}{2}$ darà l'angolo maggiore A opposto al lato BV che si suppone maggiore di AV, e sottratta dalla medesima semisomma darà il minore; e si avrà poi AB per via della soluzione 5.

7. Se si potrà fare che l'angolo V sia retto, e [illegible]rare AV, e BV, si avrà

Fig 5

$$[illegible]B = \sqrt{(AV^2 + BV^2)}$$

8. Se potendosi fare retto l'angolo V si potrà misurare anche uno degli angoli A, e B, ed uno dei lati AV, e BV, si avrà

Fig 5

$$AB = AV.\sec.\,VAB = \frac{AV}{\cos.\,VAB} \text{ ovvero}$$

$$AB = BV.\sec.\,VBA = \frac{BV}{\cos.\,VBA}$$

9. Se si potrà fare retto l'angolo A, e misurare AV, VB, si avrà
$AB = \sqrt{(BV^2 - AV^2)} = \sqrt{(BV + AV)(BV - AV)}$ Fig 6

Si procede nella stessa maniera quando si può fare un angolo retto in B.

10. Se si potrà fare un angolo retto in A, e misurare uno degli altri due angoli V, e B, ed uno de i due lati AV, BV, si avrà

$$AB = AV . \text{tang.} AVB, \text{ ovvero}$$
$$AB = BV . \text{sen.} AVB$$ Fig 6

11. Se si potrà fare un angolo retto in A, e semiretto in V, si avrà $AB = AV$ ovvero
$AB = \frac{BV}{\sqrt{2}}$

12. Se si potrà fare un angolo semiretto in A, e in B, e retto in V; si avrà

$$AB = AV . \sqrt{2} = BV . \sqrt{2}$$ Fig 5

13. Se si potranno fare retti tre degli angoli A, B, C, ed V; si avrà $AB = VC$ Fig. 7

14. Se si potrà fare semiretto l'angolo V, e misurare AV, BV; si avrà
$AB = \sqrt{(AV^2 + BV^2 - AV . BV . \sqrt{2})}$ Fig. 4

15. Preso un qualche punto V donde collo squadro si possa traguardare in A, e B, e presa sulla continuazione di un lato dell' angolo retto AVB, per esempio sulla continuazione del lato AV la VN eguale allo stesso lato AV; si avrà

$$AB = NB$$ Fig. 5

Problema II.

Misurare la CZ*, della quale non è accessibile altro, che il punto* C.

Soluzione. 1. Si prenda un punto A, che sia in linea retta coi due punti C, Z, e condotte ad un qualunqne punto B fuori di questa retta le AB, CB, e divisa la AB per metà in M, e notato sulla CB il punto P dove è tagliata dalla MZ; si avrà

Fig 8

$$CZ = \frac{AC \cdot CP}{BP - CP}$$

2. Si prenda il punto P alla metà della CB, e per esso si traguardi in Z da un punto M della AB; si avrà

$$CZ = \frac{MB \cdot AC}{MA - MB}$$

3. Se il punto M non si potesse prendere alla metà della AB; nè il punto P alla metà della CB; si avrà sempre

$$CZ = \frac{MB \cdot AC \cdot CP}{MA \cdot BC - AB \cdot CP}$$

4. Vedi le soluzioni 5. 8. 10, 11. 12. 13. del Problema I. nelle quali si suppone accessibile un solo estremo della linea AB.

5. Se non si potesse continuare la ZC, nè si potesse misurare l'angolo C; dividendo una CB egualmente in A in maniera che si possano misurare gli angoli CAZ, CBZ si avrà

Fig 9

$$CZ = AB \sqrt{\left(1 + \frac{\text{sen.}^2 ABZ}{\text{sen.}^2 AZB} + 2\,\frac{\text{sen. } ABZ}{\text{sen. } AZB} \cos.\, ZAB\right)}$$

6. Se il punto A non fosse alla metà della CB; si avrebbe

$$CZ = \sqrt{\left(AC^2 + AB^2 \frac{\text{sen.}^2 ABZ}{\text{sen.}^2 AZB} + 2AC \cdot AB \frac{\text{sen.}\ ABZ}{\text{sen.}\ AZB} \cos. ZAB \right)}$$

Fig 9

7. Ritrovata la AZ coll'equazione $AZ = AB \frac{\text{sen.}\ ABZ}{\text{sen.}\ AZB}$ e gli angoli C, e Z coll'equazione

Fig 9

$$\text{tang.} \frac{C-Z}{2} = \frac{AZ - AC}{AZ + AC} \text{tang.} \frac{C+Z}{2}$$

(vedi soluzione 6. del problema 1), si avrà

$$CZ = AC \frac{\text{sen.}\ CAZ}{\text{sen.}\ AZC} = AZ \frac{\text{sen.}\ CAZ}{\text{sen.}\ ACZ}$$

8. Se essendo A, e B nella stessa retta, sarà semiretto l'angolo ZAC, e ABZ eguale ad un quarto di retto; si avrà

$$CZ = \sqrt{(AC^2 + AB^2 - AC \cdot AB\sqrt{2})}$$

9. Facendo l'angolo $ZAB = ZAC$, ed $AB = AC$ si avrà

$$CZ = BZ = AB \frac{\text{sen.}\ ZAB}{\text{sen.}\ AZB}$$

Fig 10

Appendice per l'altimetria.

Se si voglia misurare l'altezza d'una torre AB; se sarà AB perpendicolare a BV, si avrà $AB = VB$ tang. V

Fig 11

Nel caso che V sia semiretto, sarà $AB = BV$.

Se si vorrà misurare la lunghezza d'un muro a scarpa AB; sarà come nella soluzione 5. Probl. 1.

Fig 12

$$AB = BV \frac{\text{sen.}\ V}{\text{sen.}\ A}$$

Se non si potrà misurare l'angolo ZCA, che fa il muro a scarpa ZC colla CA, che si può misurare; si avrà la CZ colle formole della soluzione §. 6. 7. 8. del Probl. II.

Fig 13

Problema III.

Misurare la XZ *tutta inaccessibile*.

Soluzione 1. Fissato un punto C accessibile, il punto A che sia nella visuale CZ, il punto B, che sia nella CX; il punto M, che sia alla metà della AB; il punto P dove la MZ taglia la CB; il punto Q dove la MX taglia la CA, e presa da C verso A sulla OA la

Fig 14

$Cz = \frac{AC.CP}{BP - CP}$, e sulla CB la

$Cx = \frac{BC.CQ}{AQ - CQ}$; la xz sarà eguale e anche parallela alla XZ.

2. Se il punto M non si fosse potuto prendere sulla metà della AB; converrà prendere

Fig 14

$$Cz = \frac{MB.AC.CP}{MA.BC - AB.CP}$$

$$Cx = \frac{MA.BC.CQ}{MB.AC - AB.CQ}$$

e sarà la xz eguale e parallela alla XZ.

3. Se fossimo impediti di prendere sul terreno le Cz, Cx; si avrà in generale

Fig. 14

$XZ = \sqrt{[(Cz - Cx)^2 + \frac{Cx.Cz}{AC.CB}(AB + BC - AC)(AB + AC - BC)]}$

si avrà dunque la XZ per via di un radicale di valori tutti conosciuti; conoscendosi Cx, e Cz pel num. 2.

Nel caso poi di $CA = CB$, si avrà

$$XZ = \sqrt{[(Cz - Cx)^2 + \frac{Cx . Cz}{AC^2} AB^2]}$$

4 Si faccia retto l'angolo ACB, e si prenda $AC = CB$; si avrà

Fig 14

$$XZ = \sqrt{(Cz^2 + Cx^2)}$$

5. Se tornasse comodo prendere i punti B, ed A in una BA tale, che lo spazio tra la BA, e la XZ non fosse accessibile; fissato il punto C accessibile al di quà della BA dove si taglino la XB, e la ZA, e preso il punto M alla metà della BA, e fissato il punto P dove la MZ taglia la CB, e il punto Q, dove la XM taglia la AC e presa sulla continuazione della ZC la $Cz = \frac{AC . CP}{CP - BP}$ e sulla continuazione della XC la $Cx = \frac{BC , CQ}{CQ - AQ}$; la xz sarà eguale e parallela alla XZ.

Fig. 15

6. Se il punto M non fosse nel mezzo della AB converrà prendere

$$Cz = \frac{MB . AC . CP}{AB . CP - MA . BC}$$

$$Cx = \frac{MA . BC \ CQ}{AB . CQ - MB . AC}$$

7. Se non si potranno prendere sul terreno le Cz, Cx si avrà XZ per via dell' equazione

$$XZ = \sqrt{[(Cz - Cx)^2 + \frac{Cx . Cz}{AC . CB}(AB + BC - AC)(AB + AC - BC)]}$$

Nel caso di $CA = CB$ si avrà

$$XZ = \sqrt{[(Cz - Cx)^2 + \frac{Cz . Cx}{AC^2} AB^2]}$$

8. Si faccia retto l'angolo ACB, e si prenda $AC = CB$; si avrà

Fig 15 $$XZ = \sqrt{(Cz^2 + Cx^2)}$$

9. All' angolo XAZ si faccia eguale l'angolo ZAB, e si vada ritirandosi tanto sulla AB finchè si trovi un punto B tale che sia l'angolo $ABX = 90^0 - ZAB = BXA$ si avrà $XZ = BZ = AB \frac{\text{sen.} ZAB}{\text{sen.} AZB}$

Fig 16

10. Fatto retto l'angolo XAB e ritirandosi tanto sulla AB, che venga retto l'angolo di traguardo ABZ, e notato il punto D sulla XA, dove la taglia il traguardo dell' angolo retto XBD; e il punto C sulla ZB, dove la taglia il traguardo dell' angolo retto ZAC; si avrà $XZ = AB\sqrt{[1 + (\frac{BA}{BC} - \frac{AB}{AD})^2]}$;

Fig 17

per l'uso poi de' logaritmi sarà più comoda la formola

$$XZ = AB\sqrt{[1 + (\frac{AB(AD - BC)}{AD.BC})^2]}$$

11. Fatto retto XAB, e trovato il punto B sulla AB sicchè sia retto anche ABZ, si trovino sulla medesima AB anche i punti C, e D, cosicchè riescono semiretti gli angoli ACX, e BDZ; si avrà

Fig 18

$$XZ = \sqrt{[AB^2 + (BD - AC)^2]}$$

pei logaritmi sarà più comoda la formola

$$XZ = AB\sqrt{(\frac{(BD - AC)^2}{AB^2} + 1)}$$

12. Trovati tre punti A, B, C tali che in essi si possa traguardare collo squadro in X, e Z cosicchè sien retti gli angoli XAZ, XBZ, XCZ sarà

$$XZ = \frac{2\,AB\,.\,BC\,.\,CA}{\sqrt{[(AB+BC+CA)(AB+BC-CA)\times(AB-BC+CA)(BC+CA-AB)]}}$$

Fig 19

ovvero trovato sulla AC un punto P tale che sia retto l'angolo APB si avrà

$$XZ = \frac{BA\,.\,BC}{BP}$$

13. Trovati tre punti A, B, C tali, che sien semiretti gli angoli XAZ, XBZ, XCZ; sarà $XZ =$

Fig 20

$$\frac{2\,.\,AB\,.\,BC\,.\,CA}{\sqrt{2[(AB+BC+CA)(AB+BC-CA)\times(AB-BC+CA)(BC+CA-AB)]}}$$

ovvero fatto retto l'angolo APB

$$XZ = \frac{BA\,.\,BC}{BP\,.\,\sqrt{2}}$$

14. Misurata la base AB, e gli angoli di traguardo ad X, e Z nei punti A, e B, si avrà

$$AX = AB\,\frac{\text{sen.}\,ABX}{\text{sen.}\,AXB}$$

Fig. 21

$$AZ = AB\,\frac{\text{sen.}\,ABZ}{\text{sen.}\,AZB}$$

coi quali due valori, e col valore dell' angolo XAZ si avrà la XZ per la soluzione 6. del Problema I. ovvero essendo $BX = AB\,\frac{\text{sen.}\,BAX}{\text{sen.}\,BXA}$

$$BZ = AB\,\frac{\text{sen.}\,BAZ}{\text{sen.}\,BZA}$$

con questi due valori, e col valore dell' angolo XBZ si avrà pure la XZ per la medesima soluzione 6. del Probl. I.

15. Stanti le condizioni del num. precedente 14., si avrà il valore della XZ egualmente dalle due equazioni

Fig 21

$$XZ = AB \sqrt{\left(\frac{\text{sen.}^2 ABX}{\text{sen.}^2 AXB} + \frac{\text{sen}^2 ABZ}{\text{sen}^2 AZB} - 2 \frac{\text{sen. } ABX \text{ sen. } ABZ}{\text{sen. } AXB \text{ sen. } AZB} \cos. XAZ \right)}$$

$$XZ = AB \sqrt{\left(\frac{\text{sen}^2 BAX}{\text{sen}^2 BXA} + \frac{\text{sen.}^2 BAZ}{\text{sen.}^2 BZA} - 2 \frac{\text{sen. } BAX \text{ sen. } BAZ}{\text{sen. } BXA \text{ sen. } BZA} \cos. XBZ \right)}$$

16. Fatto retto l'angolo XAB, e osservato l'angolo ZAB; trovato pure un punto B, dove si abbia retto l'angolo ABZ, e osservato l'angolo ABX; si avrà $XZ = AB \sqrt{[1 + (\text{tang. } ZAB - \text{tang. } XBA)^2]}$ ovvero cercato sulle tavole l'angolo, che ha per tangente la differenza delle tangenti di ZAB, e di XBA, e chiamando quest'angolo trovato A; si avrà $XZ = AB$ sec. A

Fig. 16

17. Piantata una palina in C cosicchè l'angolo XCZ sia maggior d'un retto, e trovati due punti A sulla ZC, B sulla XC tali che sieno retti gli angoli XAZ, XBZ; si avrà

Fig 21

$$XZ = \frac{2AB \cdot BC \cdot CA}{AB^2 - BC^2 - CA^2}$$

18. Trovati i due punti A, e B come al num. 17. ed essendo Q il punto dove si tagliano le XA, ZB; si avrà

Fig 21

$$XZ = \frac{2AB \cdot BQ \cdot QA}{AQ^2 + BQ^2 - AB^2}$$

19. Fatto retto l'angolo di osservazione XCZ, e continuate le ZC in A, e XC in B finchè si abbiano gli angoli CAX, CBZ semiretti; sarà $XZ = AB$

Fig 22

20. Fatti retti gli angoli XAB, ZAC e semiretti gli angoli XBA, ZCA; sarà $XZ = BC$

Fig 23

Appendice per l'altimetria.

Se sia da misurarsi l'altezza inaccessibile AB supposto, che si possa misurare la DC, che è una parte dell' orizzontale DB, e gli angoli ADB, ACB; si avrà

Fig. 24

$$AB = DC \frac{\text{sen. } ADC}{\text{sen. } DAC} \text{ sen. } ACB$$

Se DC non fosse parte dell' orizzontale CB, ma facesse qualunque angolo coll' orizzonte; e se il piano del triangolo ADC non fosse lo stesso col piano del triangolo verticale ACB, si avrebbe ancora

Fig 25

$$AB = DC \frac{\text{sen. } ADC}{\text{sen. } DAC} \text{ sen. } ACB$$

Se all' altezza AB della torre, si volesse aggiungere l'altezza BE posta sotto l'orizzontale CB; essendo conosciuto l'angolo BCE, e però CEB, ed ACE; si avrà

Fig 25

$$AE = DC \frac{\text{sen. } ADC \text{ . sen. } ACE}{\text{sen. } DAC \text{ . sen } CEA}$$

e ciò anche se il triangolo ADC non sia verticale, nè la DC orizzontale.

Se si vorrà misurare l'altezza obbliqua AB d'un muro a scarpa; conosciuto il suo angolo d'inclinazione ABE coll' orizzontale BE, e l'angolo BCF del traguardo CB coll' orizzontale CF, e però anche CBF suo complemento; si avrà $CBA = 270^\circ - CBF - ABE$

Fig 26

$$AB = DC \frac{\text{sen. } ADC \text{ sen. } ACB}{\text{sen. } DAC \text{ sen. } CBA}$$

CASI PARTICOLARI

Caso I.

Si può misurare la orizzontale inaccessibile DC stando in A sopra una torre AB; se sarà nota l'altezza AB dal piano orizzontale che passa per la DC, e se si ponno misurare gli angoli CAB, DAB, DAC; e si avrà
Fig 25.

$DC = AB \sqrt{(\text{sec.}^2 CAB + \text{sec.}^2 DAB - 2\,\text{sec.}\,CAB\,\text{sec.}\,DAB\,\text{cos.}\,DAC)}$

Se il piano del triangolo DAC sarà verticale, cioè se la DC sarà sulla continuazione della BC; si avrà
Fig 24

$DC = AB(\text{tang.}\,DAB - \text{tang.}\,CAB]$

Caso II.

Se si volesse determinare la posizione di un luogo dal quale si vedono tre luoghi, la cui posizione è nota, ed il quale pur da essi non si può scorgere; come avviene per esempio, allorchè si vede solamente la cima di tre campanili, sino alla quale non si potesse montare per discoprire quel luogo, da cui fu osservata.
Fig 27

Sieno A, B, C i tre luoghi noti di posizione, onde ogni parte del triangolo ABC si si suppone cognita; e sia D il luogo ignoto, dal quale essendo stati osservati gli angoli m, n, si dimandano le distanze BD, AD, CD.

Si avrà cotang. $x = \dfrac{AB\,\text{sen.}\,(m+n)}{BC\,\text{sen.}\,m\,.\,\text{sen.}\,(B-n)}$ $-$ cotang. $(B-n)$ ovvero per più comodo del calcolo coi logaritmi cotang. $x =$

cotang. $(B-n)\left(\dfrac{\text{sen.}\,C\,\text{sen.}\,(m+n)}{\text{sen.}\,BAC.\,\text{sen.}\,m\,\text{cos.}\,(B-n)} - 1\right)$

Trovato in questa maniera il segmento x dell' angolo BAC, si conoscerà per conseguenza l'altro segmento CAD, e si avrà

$$BD = BA \frac{\text{sen.}\, x}{\text{sen.}\, m}$$

$$AD = \begin{cases} BA \dfrac{\text{sen.}\,(m + x)}{\text{sen.}\, m} \\ CA \dfrac{\text{sen.}\,(n + y)}{\text{sen.}\, n}. \end{cases}$$

$$DC = CA \frac{\text{sen.}\, y}{\text{sen.}\, n}$$

Se $B < n$ si avvertirà che cotang. $(B - n)$ diviene negativa.

Se il punto D fosse dentro del triangolo ABC; si avrebbe $(m + n) > 180^{\circ}$, ed allora anche sen. $(m + n)$ sarebbe negativo.

Nel caso che fosse $B = n$, il problema sarà indeterminato; poichè in tal caso un cerchio passerà pei quattro punti A, B, C, D, e non si potrà conchiuder altro, se non che il punto D è sulla circonferenza del cerchio, che passa pei tre punti A, B, C. Ciò si conoscerà ancora dalla costruzione seguente.

Se non preme di conoscere le distanze AD, ED, CD, ma solamente la situazione convenevole al punto D sopra una carta; sarà più spedita questa costruzione.

Si faccia passare pei punti A, e B un cerchio di raggio $\frac{AB}{2\,\text{sen.}\, m}$, e pei punti A, e C un altro cerchio di raggio $= \frac{AC}{2\,\text{sen.}\, n}$. Questi due cerchi si taglieranno in due luoghi, cioè in A, e nel punto cercato D.

Corollario.

Se $B = 0$, il che succede quando i tre luoghi B, A, e C sono posti in linea retta (si consideri il luogo A nel punto a d' intersezione della AD colla BC, ed $x = BaD$); sarà allora

Fig 28

$$\text{cotang.}\ x = \text{cotang.}\ n\left(1 - \frac{AB\,.\,\text{sen.}\,(m+n)}{BC\,.\,\text{sen.}\ m\ \text{cos.}\ n}\right)$$
$$= \frac{AC\ \text{cot.}\ n - AB\ \text{cot.}\ m}{BC}$$

Trovato così l'angolo x, si avranno anche gli angoli $B = 180^\circ - x - m$

$$DAC = 180^\circ - x$$
$$C = x - n$$

e le distanze

$$AD = AB\frac{\text{sen.}\ B}{\text{sen.}\ m} = AC\ \frac{\text{sen.}\ C}{\text{sen.}\ n}$$
$$BD = AB\,\frac{\text{sen.}\ x}{\text{sen.}\ m} = BC\ \frac{\text{sen.}\ C}{\text{sen.}\ (m+n)}$$
$$CD = AC\,\frac{\text{sen.}\ DAC}{\text{sen.}\ n} = BC\ \frac{\text{sen.}B}{\text{sen.}\,(m+n)}$$

Se si vorrà la perpendicolare DP alla BC si avrà $DP = AD\ \text{sen.}\ x$

Problema IV.

Trovare la distanza VP *del punto* V *dalla* AB *accessibile ai soli estremi* A, *e* B.

Fig 29

Soluzione

1. $VP = \dfrac{AV\,.\,BV\,.\,\text{sen.}\ AVB}{\sqrt{(AV^2 + BV^2 - 2\,AV\,.\,BV\ \text{cos.}\ AVB)}}$
2. $VP = AV\ \text{sen.}\ A = BV\ \text{sen.}\ B$

Problema V.

Trovare la distanza AP *del punto* A *dalla* *XZ tutta inaccessibile*.

Soluzione. Misurata una base AB, e gli angoli di traguardo verso X e Z nei punti A, e B; si avrà

Fig 30

$$AP = \frac{AB \text{ sen. } XAZ}{\sqrt{\left[\left(\frac{\text{sen.}^2 AXB}{\text{sen.}^2 ABX} + \frac{\text{sen.}^2 AZB}{\text{sen.}^2 ABZ}\right.\right.} \times}$$
$$\left.\left. - 2\,\frac{\text{sen. } AXB \text{ sen. } AZB}{\text{sen. } ABX \text{ sen. } ABZ} \cos. XAZ\right)\right]$$

$$AP = \frac{AB \text{ sen } XBZ}{\sqrt{\left[\left(\frac{\text{sen.}^2 BXA}{\text{sen.}^2 BAX} + \frac{\text{sen.}^2 BZA}{\text{sen.}^2 BAZ}\right.\right.} \times}$$
$$\left.\left. - 2\,\frac{\text{sen. } BXA \text{ sen. } BZA}{\text{sen. } BAX \text{ sen. } BAZ} \cos. XBZ\right)\right]$$

Problema VI.

Trovare la distanza delle due parallele AB, CD *nel trapezio* ABCD *per via dei soli lati*.

Soluzione. Sia $AD = a$; $BC = b$; $CD = c$; $DA = d$; la distanza delle due parallele sarà =

Fig 31

$$\frac{\sqrt{\left[2(d^2+b^2)(a-c)^2-(a-c)^4-(d^2-b^2)^2\right]}}{2(a-c)}$$

Problema VII.

Dati i tre angoli A, B, C *d'un triangolo, e l'area* S *del medesimo, trovare un lato per esempio* AB.

Fig 1

Soluzione. Sarà $AB = \sqrt{\frac{2S \cdot \text{sen.}\, C}{\text{sen.}\, A \ \text{sen.}\, B}}$

Problema VIII.

Trovare la distanza AB *inaccessibile fuori che ai punti* A, *e* B, *dai quali si ponno vedere due estremi* X, *e* Z *d'una retta tutta inaccessibile ma conosciuta di lunghezza*.

Soluzione 1. Sarà

Fig 30

$$AB = \frac{XZ}{\sqrt{\left[\left(\frac{\text{sen.}^2\, ABX}{\text{sen.}^2\, AXB} + \frac{\text{sen.}^2\, ABZ}{\text{sen.}^2\, AZB} - 2\,\frac{\text{sen.}\, ABX\ \text{sen.}\, ABZ}{\text{sen.}\, AXB\ \text{sen.}\, AZB}\cos.\, XAZ\right)\right]}}$$

$$AB = \frac{XZ}{\sqrt{\left(\left[\frac{\text{sen.}^2\, BAX}{\text{sen.}^2\, BXA} + \frac{\text{sen.}^2\, BAZ}{\text{sen.}^2\, BZA} - 2\,\frac{\text{sen.}\, BAX\ \text{sen.}\, BAZ}{\text{sen.}\, BXA\ \text{sen.}\, BZA}\cos.\, XBZ\right)\right]}}$$

2. Si dia un valore di falsa posizione alla AB, e si supponga incognita la ZX, e si adoperi la soluzione 14. del Problema III.; ne risulterà un valore falso della ZX; poi si faccia come questo valor falso della ZX al valor falso preso della AB, così il valor vero conosciuto della ZX al valor vero della incognita AB.

LI.

LIBRO SECONDO

Della direzione delle linee, e della misura degli angoli.

PROBLEMA I.

Continuare la retta AB *in* C, *e* D *al di la dell' ostacolo* X *che impedisce il traguardo.*

Soluzione 1. Si guidi un' indefinita AP, che faccia l'angolo acuto BAP, e guidata ad essa la BM, che faccia con essa un qualunque angolo BMA (sarà più comodo se sarà retto); si facciano ai punti N, e P gli angoli ANC, APD eguali ad AMB, e si prenda $CN = AN \frac{BM}{AM}$; $PD = AP \frac{BM}{AM}$; i punti C, e D saranno nella retta AB. Fig 32

2. Si faccia semiretto l'angolo BAM, e retti gli angoli in N, e P, e si prenda $CN = AN$; $PD = AP$.

3. Guidata una LP distante dalla AB, e fatti eguali gli angoli in L, M, N, P si faccia Fig 33

$$CN = \frac{LN \,.\, BM - AL \,.\, MN}{LM}$$

$$PD = \frac{LP \,.\, BM - AL \,.\, MP}{LM}$$

4. Se si sarà preso $LM = MN = NP$; si avià $CN = 2\,BM - AL$

$PD = 3\,BM - 2\,AL$

5. Per via degli angoli M, N, P retti si avrà nella costruzione del num. 3.

$CN = MN$ (tang. BLM — tang. AML) + LM tang. BLM

$DP = MP$ (tang. BLM — tang. AML) + LM tang. BLM

ovvero

Trovato il punto D colla

$PD = MP$ (tang. BLM — tang. AML) + LM tang. BLM

si trovi sulle tavole trigonometriche l'angolo, che ha per tangente la differenza delle due tangenti di BLM, ed AML, e si faccia PDC eguale ad esso.

6. Preso un punto V, dal quale si possano misurare le AV, BV, CV, DV, e i loro angoli, si dovrà prendere

Fig. 34

$$VC = \frac{VA \,.\, VB \text{ sen. } AVB}{VA \text{ sen. } AVC - VB \text{ sen. } BVC}$$

$$VD = \frac{VA \,.\, VB \text{ sen. } AVB}{VA \text{ sen. } AVD - VB \text{ sen } BVD}$$

ovvero

Trovato il punto C colla

$$VC = \frac{VA \,.\, VB \text{ sen. } AVB}{VA \text{ sen. } AVC - VB \text{ sen. } BVC}$$

si faccia l'angolo $VCD = VAB + AVC$

7. Se non si possano misurare le VA, VB, ma solo le VC, VD; presa una base VX, che si possa misurare, e tale che da X si possano vedere A, e B, si dovrà prendere

Fig 34

$$VC = VX \frac{\text{sen. } AXV \text{ sen. } BXV \text{ sen. } AVB}{[\text{sen. } AXV \text{ sen. } VBX \text{ sen. } AVC - \text{sen. } BXV \text{ sen. } VAX \text{ sen. } BVC]}$$

$$VD = VX \frac{\text{sen.}\, AXV\, \text{sen.}\, BXV\, \text{sen.}\, AVB}{[\text{sen.}\, AXV\, \text{sen.}\, VBX\, \text{sen.}\, AVD - \text{sen.}\, BXV\, \text{sen.}\, VAX\, \text{sen.}\, BVD]}$$

ovvero

Trovato il punto C colla formola di questo numero, e l'angolo VAB per via dell' equazione

$$\text{sen.}\, VAB = \frac{\text{sen.}\, AVB}{\sqrt{\left(1 + \frac{\text{sen.}^2\, VZA\, \text{sen.}^2\, VBZ}{\text{sen.}^2\, VAZ\, \text{sen.}^2\, VZB} - 2\frac{\text{sen.}\, VZA\, \text{sen.}\, VBZ}{\text{sen.}\, VAZ\, \text{sen.}\, VZB} \cos.\, AVB\right)}}$$

si faccia l'angolo $VCD = VAB + AVC$

8. Se si potrà misurare l'angolo BAV, e la AV; si farà

$$VC = AV \frac{\text{sen.}\, VAB}{\text{sen.}\,(VAB + AVC)}$$

$$VD = AV \frac{\text{sen.}\, VAB}{\text{sen.}\,(VAB + AVD)}$$

ovvero

Trovato il punto C colla formola di questo numero si farà l'angolo Fig 34

$$VCD = VAB + AVC$$

9. Se gli angoli VAB, ed AVC saranno semiretti; si avrà $VC = \frac{AV}{\sqrt{2}}$ Fig 35

10. Fatto semiretto l'angolo BAV, e retto AVC si dovrà prendere $VC = VA$, e l'angolo VCD eguale a tre semiretti. Fig 36

11. Se si potrà misurare la AB, e gli angoli ABV, BAV senza che si possano misurare AV, BV; si farà Fig 34

$$VC = AB \frac{\text{sen.}\, ABV\, \text{sen.}\, VAB}{\text{sen.}\, AVB\, \text{sen.}\,(VAB + AVC)}$$

Problema II.

Alla linea inaccessibile x z *condurre una parallela per un punto dato* D. *Si suppongono accessibili i punti* x . z .

Fig 37

Soluzione 1. Condotta la Dx, e pel punto V, che è alla metà della medesima condotta la zVE, e fatta $VE = Vz$, la DE sarà la parallela.

ovvero

Se il punto V non sia alla metà della Dx: fatta $VE = \frac{DV \cdot Vz}{Vx}$; sarà DE la parallela.

ovvero

Fig 38

Da un punto V si continui la VD in z, e ad un angolo arbitrario con essa Vz si collochi la Vx

Si prenda $VE = \frac{xV \cdot VD}{zV}$

la DE sarà la parallela.

ovvero

Preso dall' altra parte il punto W, e condotte le due rette WD, e We, che tagli in y la zx si prenda $We = \frac{Wy \cdot WD}{Wz}$

la De sarà la parallela.

Fig 39

2. Fissato sulla xz il punto V, dove piantando lo squadro si abbia retto l'angolo zVD, si faccia retto l'angolo VDE; la DE sarà la parallella

Fig 40

3. Tirata per D la Vx, che faccia qualunque angolo colla xz, si faccia l'angolo $VDK = Vxz$. La DE sarà la parallela.

4. Se si potranno misurare le DX, DZ, e

l'angolo XDZ, ma non si potrà traguardare da X in Z; almeno uno de' due angoli X e Z sarà acuto per esempio XZD opposto al minor lato; esso si trovi per via dell'equazione sen. $XZD = \frac{DX \text{ sen. } XDZ}{\sqrt{(DX^2 + DZ^2 - 2DX.DZ \cos XDZ)}}$ e ad esso si faccia eguale l'angolo ZDE; la DE sarà la parallela cercata. Fig 41

Problema III.

Alla linea XZ tutta inaccessibile condurre una parallela pel punto A.

Soluzione 1. Preso un punto C sulla AZ, e un punto B sulla CX, e pel punto M, che è alla metà della AB traguardando in X e Z, e marcando i punti Q e P sulle CA, CB, e presa sulla CB la $CE = \frac{BC.CQ(BP - CP)}{(AQ - CQ)CP}$, la AE sarà la parallela. Fig 41

2. Se il punto M non si potesse prendere alla metà della AB; si dovrà prendere
$$CE = \frac{MA.BC.CQ(MA.BC - AB.CP)}{MB.CP(MB.AC - AB.CQ)}$$

3. Fatto l'angolo ZAV eguale all'angolo ZAX, e ritirandosi tanto sulla AV, che l'angolo AVX riesca eguale a $90^\circ - ZAV$; si faccia l'angolo $ZAE = 180^\circ - ZAV - ZVA$. la AE sarà la parallela. Fig 42

4. Fatto retto l'angolo di osservazione XCZ, e continuata la ZC in A, e la XC in V finchè si abbiano gli angoli CAX, CVZ semiretti; e presa sulla CV la $CD = \frac{AC^2}{CV}$, la AD sarà parallela alla XZ.

5. Preso un punto A sulla DX dove collo squadro si possa traguardare in Z, ed X, e preso altrove un qualunque punto B, dove pure collo squadro si possa traguardare in Z, ed X; e notato il punto C dove le AX, BZ si tagliano; se il punto C è tra D ed X; sulla CB si prenda $CE = CD \frac{CA}{CB}$, la DE sarà la parallela;

Fig 43

Se il punto D è tra C, ed X; si prenda sulla CZ la $CE = CD \frac{CA}{CB}$.

Fig 44

6. Preso un punto A sulla DZ, donde si possa traguardare collo squadro in Z, ed X, e preso dovunque un altro punto B simile, e notato il punto C, dove si tagliano le ZA, XB; si prenda $CE = CD \frac{CA}{CE}$; la DE sarà la parallela.

Fig 45

7. Se gli angoli ZAX, ZBX fossero semiretti, o qualunque, ma eguali tra loro, la solnzione sarebbe la medesima come ne' due numeri 5, e 6.

Fig 43,44,45

8. Agli estremi D, e C di una base DC, che si possa misurare si osservino gli angoli di traguardo in X, e Z; si trovi nelle tavole quale angolo ha il suo seno

Fig 46

$$= \frac{\text{sen. } XDZ}{\sqrt{\left(1 + \frac{\text{sen.}^2 DCX \text{ sen.}^2 DZC}{\text{sen.}^2 DXC \text{ sen.}^2 DCZ} - 2 \frac{\text{sen. } DCX \text{ sen. } DZC}{\text{sen. } DXC \text{ sen. } DCZ} \cos. XDZ\right)}}$$

questo sarà l'angolo DXZ; il quale sarà acuto, se la quantità espressa dalla formola

$\frac{\text{sen. } DCX}{\text{sen. } DXC} - \frac{\text{sen. } DCZ}{\text{sen. } DZC} \cos. XDZ$
sarà positiva; e viceversa sarà ottuso.

Facendo dunque XDE eguale al supplemento di DXZ; la DE sarà la parallela.

PROBLEMA IV.

Alla retta tutta accessibile z x *da un punto dato* C *fuori di essa tirare la normale* C N *senza ajuto di sqnadro o di grafometro.*

Soluzione 1. Condotte alla zx le Cz, Cx che facciano gli angoli Czx, Cxz entrambi acuti, del che può giudicare l'occhio; si prenda

Fig 48

$$xN = \frac{xz^2 + Cx^2 - zC^2}{2\,xz}$$

la CN sarà la perpendicolare cercata.

2. Si prenda $zx = zC$; $xN = \frac{Cx^2}{2\,xz}$; la CN sarà la perpendicolare.

PROBLEMA V.

Dal punto V *della* x z *alzare la perpendicolare* V T *senza ajuto di squadro o di grafometro.*

Soluzione 1. Tirate da un punto C alla zx le Cx, Cz, che facciano gli angoli Cxz, Czx acuti, il che si fa ad occhio; si prenda sulla xC la $xT = \frac{2\,xV \cdot xC \cdot xz}{xz^2 + xC^2 - zC^2}$, la VT sarà la normale cercata.

Fig 49

2. Presa una VC, che faccia l'angolo CVx acuto, e presa $Vx = VC$, e sulla xC la xT eguale a $\frac{2\,xV^2}{xC}$; la VT sarà la normale cercata.

Fig 50

PROBLÈMA VI.

Alla inaccessibile XZ *condurre una visuale perpendicolare al punto* X.

Fig 51 *Soluzione* 1. Segnata la zx parallela ed eguale alla XZ col metodo delle soluzioni del Probl. III. lib. I. è presa da x verso z la

$$xV = \frac{xz^2 + xC^2 - zC^2}{xz}$$

$$= xz + \frac{(xC + zC)(xC - zC)}{xz}$$

la retta, che anderà da V in X sarà la perpendicolare cercata al punto X.

2. Trovata in qualunque maniera la zx parallela alla XZ; si potrà collo squadro trovare il punto V, dove l'angolo xVX sia retto.

3. Fatto l'angolo ZAB eguale all'angolo ZAX, e trovato sulla AB un punto B dove Fig 52 sia l'angolo $ABX = 90° - ZAB$; si guidi la BC perpendicolare alla BZ, che tagli la AZ in C. La CX sarà perpendicolare alla XZ nel punto X.

4. Se la XZ sarà accessibile ai soli estremi, e non si potrà traguardare da X in Z; Fig 53 preso un punto A fuori di essa, e misurate le AX, AZ, e l'angolo XAZ; si prenda

$$AC = AX \frac{AX - AZ \cos. XAZ}{AX \cos. XAZ - AZ}$$

se il suo valore riesce positivo; il punto C dovrà prendersi tra A, e Z, e la CX sarà la perpendicolare cercata.

Se il valore $AX \frac{AX - AZ \cos. XAZ}{AX \cos. XAZ - AZ}$

Fig 54 sarà negativo; si dovrà prendere AC sulla

continuazione della ZA, e la CX sarà la perpendicolare cercata.

5. Se la XZ sarà tutta inaccessibile; presa una base AB, che si possa misurare, e agli estremi della quale si possa traguardare in X, e Z; si prenda $AC =$ Fig 55

$$AB \frac{\text{sen.} ABX}{\text{sen.} AXB} \cdot \frac{\frac{\text{sen.}\, ABX}{\text{sen.}\, AXB} - \frac{\text{sen.}\, ABZ}{\text{sen.}\, AZB} \cos. XAZ}{\frac{\text{sen.}\, ABX}{\text{sen.}\, AXB} \cos. XAZ - \frac{\text{sen.}\, ABZ}{\text{sen.}\, AZB}}$$

se il suo valore riuscirà positivo; il punto C sulla AZ dovrà essere tra A, e Z; e la CX sarà la cercata.

Se il suo valore riesce negativo; si dovrà prendere AC sulla continuazione della ZA, e la CX sarà la perpendicolare cercata. Fig 56

6. Per via dell' equazione

$$\text{sen.}\, AXZ = \frac{\text{sen.}\, XAZ}{\sqrt{\left(1 + \frac{\text{sen.}^2 ABX\ \text{sen.}^2 AZB}{\text{sen.}^2 AXB\ \text{sen.}^2 ABZ} - 2\frac{\text{sen.}\, ABX\ \text{sen.}\, AZB}{\text{sen.}\, AXB\ \text{sen.}\, ABZ} \cos. XAZ\right)}}$$

si troverà l'angolo AXZ; il quale sarà ottuso se $\frac{\text{sen.}\, ABX}{\text{sen.}\, AXB} - \frac{\text{sen.}\, ABZ}{\text{sen.}\, AZB} \cos. XAZ$ sarà una quantità negativa. In tal caso presa sulla AB la $AV =$

$$AB \frac{\text{sen.}\, ABX\ \text{sen.}\,(AXZ - 90^\circ)}{\text{sen.}\, AXB\ \text{sen.}\,(270^\circ - XAB - AXZ)}$$

la VX sarà la perpendicolare cercata.

Se la quantità

$\frac{\text{sen.}\, ABX}{\text{sen.}\, AXB} - \frac{\text{sen.}\, ABZ}{\text{sen.}\, AZB} \cos. XAZ$ sarà posi- Fig 57

tiva; l'angolo AXZ sarà acuto. In tal caso presa sulla continuazione della BA la AV
$$= AB \frac{\text{sen. } ABX \text{ sen. } (90^\circ - AXZ)}{\text{sen. } AXB \text{ sen. } (XAB + AXZ - 90^\circ)}$$
la VX sarà la perpendicolare cercata.

LIBRO TERZO

Della misura delle superficie.

PROBLEMA I.

Misurare la superficie di un triangolo ABC. Fig. 59

Soluzione 1. Calata da qualche angolo A la AD perpendicolare al lato BC opposto all' angolo A continuato se fa bisogno; sarà l' area o superficie del triangolo ABC espressa dalla formola $\frac{1}{2} AD \,.\, BC$.

2. Se si potranno misurare due lati, e l' angolo intercetto, per esempio i lati AB, AC, e l' angolo A; sarà la superficie $= \frac{1}{2} AB \,.\, AC$ sen. A.

3. Se si potranno misurare due lati e un angolo adjacente ad uno di essi; per esempio i lati AB, AC, e l' angolo C; sarà la superficie $= \frac{1}{2} AC \,.\, \text{sen.}\, C\,[AC \,.\, \text{cos.}\, C + \sqrt{(AB^2 - AC^2 \,\text{sen.}^2\, C)}\,]$.

Si potrà ancora trovare l' angolo B per via della formola sen. $B = \frac{AC \,.\, \text{sen.}\, C}{AB}$, e la superficie sarà $= \frac{1}{2} AB \,.\, AC$ sen. $(B + C)$..

4. Se si potranno misurare i tre lati; la superficie sarà
$= \frac{1}{4} \sqrt{(AB + AC + BC)(AB + AC - BC)(AB - AC + BC)(AC + BC - AB)}$

5. Se si potrà misurare un lato e due angoli, dai quali risulta anche il terzo; per esem-

pio se si abbia il lato BC, e i tre angoli A, B, C; la superficie sarà $\frac{1}{2} BC^2 \frac{\text{sen. } B \text{ sen. } C}{\text{sen. } A}$;

Fig 60 6 Se nel triangolo ABC non sarà accessibile altro che il lato AB, e non si possano impiegare i seni; continuando il lato CA in L finchè sia $AL = AB$, e divisa la LB per metà in M, e notato il punto P, dove la visuale MC taglia la AB; sarà l'area del triangolo $ABC = \frac{AM \,.\, LM \,.\, AP}{BP - AP}$.

Fig 61 7. Sia inaccessibile la AB, e si possano solo misurare le AC, BC, e presa sulla CB la $CD = CA$ si possa misurare la AD; sarà l'area del triangolo $ABC = \frac{1}{2} AD \,.\, BC \times \sqrt{(1 - \frac{AD^2}{4AC^2})}$ e volendo impiegare i logaritmi; sarà il logaritmo dell'area $= l. \frac{1}{2} AD - l. AC + l. BC + \frac{1}{2} [l. (AC + \frac{1}{2} AD) + l. (AC - \frac{1}{2} AD)]$.

Se non si potrà misurare la AD; prese eguali le due CP, CQ sopra le CA, CB, e misurata la PQ; sarà l'area $ABC = \frac{1}{2} BC \,.\, PQ \frac{AC}{PC} \sqrt{(1 - \frac{PQ^2}{4PC^2})}$, e il suo logaritmo $= l. PQ - l. 2PC + l. BC + l. AC + \frac{1}{2} l(PC + \frac{1}{2} PQ) + \frac{1}{2} l(PC - \frac{1}{2} PQ)$.

Scolio.

Potendosi ogni poligono dividere in triangoli; il presente problema servirà a trovare l'area di qualunque poligono, sommando le

aree dei triangoli nei quali si può dividere per mezzo del problema seguente.

Problema II.

Dividere un poligono ABCDEF *in tanti triangoli*.

Soluzione 1. Preso un punto O dentro il poligono, da esso si tirino agli angoli le rette OA, OB, OC, OD, OE, OF, e avremo tanti triangoli, che compongono il poligono, quanti sono i lati dello stesso poligono. Fig 62

2. Preso un punto O sopra un qualunque lato AB del poligono, e condotte da esso agli angoli le OC, OD, OE, OF; avremo tanti triangoli quanti sono i lati del poligono meno uno. Fig 63

3. Da un angolo qualunque A del poligono condotte le AC, AD, AE agli altri angoli; avremo tanti triangoli componenti il poligono, quanti sono i suoi lati meno due. Fig 64

Problema III.

Misurare l'area d'un parallelogrammo ABCD.

Soluzione 1. La sua area è eguale al prodotto d'un lato preso per base nell'altezza del parallelogrammo, cioè nella distanza dell'altro lato parallelo, cioè fatta PQ perpendicolare alle due AB, DC, ed MN perpendicolare alle due AD, BC; sarà l'area $ABCD = DC.PQ = AD.MN$. Fig 65

2. Sarà la stessa area eguale al prodotto di due lati contigui moltiplicati tra loro, e col

seno dell' angolo, che formano, cioè $= AD.DC$ sen. $ADC = DC.CB$ sen. DCB.

Fig 66 Se il parallelogrammo sarà rettangolo, la sua area sarà eguale al prodotto di due lati contigui $= AB.BC$.

Problema IV.

Fig 67 *Misurare l'area d'un trapezio* ABCD, *nel quale* AB, *e* CD *sono i due lati paralleli*.

Soluzione 1. Condotta la PQ normale ai due lati paralleli, l'area del trapezio sarà $= \frac{1}{2}(AB + CD)PQ$.

2. Divisi per metà i due lati AD, BC che non son paralleli in M, ed N, e condotta la MN; sarà l'area del trapezio $= MN.PQ$.

3. Sia $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $DA = d$; l'area sarà $= \frac{(a+c)}{4(a-c)} \sqrt{[2(d^2 + b^2)(a-c)^2 - (a-c)^4 - (d^2 - b^2)^2]}$

Problema V.

Fig 68 *Ridurre un poligono* ABCDEFGHIKL *in tanti triangoli e trapezi*.

Soluzione. Condotta una retta, per esempio la AF, che divida il poligono in due parti; sopra essa da tutti i punti degli angoli del poligono si calino le perpendicolari Bb, Cc, Dd, Ee, Gg, Hh, Ii, Kk, Ll. Il poligono resterà diviso in trapezi e triangoli.

Scolio.

Questo metodo riesce molte volte più comodo della divisione in triangoli per avere l'area d'un poligono, e si eseguisce facilmente collo squadro.

Problema VI.

Misurare un poligono ABCDEF *per via d'un rettangolo, e di tanti trapezi, e triangoli.*

Soluzione 1. Si iscriva nel poligono il rettangolo $APQa$, il quale si procuri; che sia il maggiore o uno de' maggiori, che si possano iscrivere. Dai punti B, C, D si calino sui lati del rettangolo le perpendicolari Bb, Cc, Dd. La somma di tutte le parti darà la misura del tutto. Fig. 69

2. Al medesimo poligono si circoscriva il rettangolo $FfeE$, che si procuri che sia il minore possibile. Dagli angoli del poligono, i quali non si trovano essere sui lati del triangolo, per esempio dai punti A, B, D si calino sui lati del medesimo rettangolo le perpendicolari Aa, Bb, Dd. Sottraendo dall' area del rettangolo $FfeE$ le aree che restano esterne al poligono $ABCDEF$, resterà l'area del poligono. Fig 70

Problema VII.

Misurare l'area del quadrilatero ABXZ.

Soluzione 1. Se si potranno misurare le diagonali AZ, BX, e la superficie di uno dei quattro triangoli ACB, BCZ, ZCX, XCA Fig 71

per esempio di $ACB = A$; sarà la superficie di tutto il quadrilatero $= A \frac{AZ \cdot BX}{AC \cdot BC}$.

2. Se non si potranno misurare se non le tre rette AB, AC, BC, preso un punto M alla metà di AB, e notati sulle CA, CB i punti Q, e P per via delle MX, MZ, e chiamando A l'area del triangolo ACB, sarà l'area $ABZX = A \frac{BP \cdot AQ}{(AQ - CQ)(BP - CP)}$.

Se il punto M non si potrà prendere alla metà della AB; sarà l'area $ABZX =$ $A\left(1 + \frac{MB \cdot CP}{MA \cdot BC - AB \cdot CP}\right)\left(1 + \frac{MA \cdot CQ}{MB \cdot AC - AB \cdot CQ}\right)$.

3. Se si potranno continuare due lati convergenti qualunque, per esempio XB, ZA sino a che s'incontrino in C, e si potranno misurare le linee XC, ZC, e l'area A del triangolo ABC; sarà l'area del quadrilatero $ABXZ =$

Fig 72 $A\left(\frac{CX \cdot CZ}{CA \cdot CB} - 1\right)$.

Se in vece della superficie A del triangolo ABC si abbia la superficie S del triangolo CXZ; sarà la superficie del quadrilatero $ABXZ = S\left(1 - \frac{CA \cdot CB}{CX \cdot CZ}\right)$.

4. Se non si potranno misurare se non le tre rette, AB, AC, BC, preso il punto M alla metà della AB, e notati sulle AC, BC i punti Q, e P dove le tagliano le XM, ZM, e chiamata A l'area del triangolo ABC; sarà l'area $ABXZ = A\left(\frac{CP \cdot CQ}{(CP - BP)(CQ - AQ)} - 1\right)$,

Se

Se il punto M non si potrà prendere alla metà della AB; sarà l'area $ABXZ =$

$$A\left(\frac{MA.CQ}{AB.CQ-MB.AC}.\frac{MB.CP}{AB.CP-MA.BC}-1\right).$$

5. Preso il punto M alla metà della AB, se la XB continuata da X verso B sarà tagliata in P dalla continuazione della ZM, e la ZA in Q dalla continuazione della XM; tirata la PQ, e fatta l'area $AMQ = a$; $QMP = c$; $PMB = b$ sarà l'area $ABXZ =$ Fig 73

$$ab\,\frac{3c-a-b}{(c-a)(c-b)}.$$

Se il punto M non sarà alla metà della AB; sarà l'area $ABXZ =$

$$ab\,\frac{c\left(1+\frac{MA}{MB}+\frac{MB}{MA}\right)-a-b}{\left(c\frac{MA}{MB}-a\right)\left(c\frac{MB}{MA}-b\right)}$$

PROBLEMA VIII.

Misurare l'area del pentagono ADEFG *per via delle tre diagonali* AE, AF, GD.

Soluzione. Sia la GD tagliata in B dalla AF, e in C dalla AE. Chiamando A l'area del triangolo ABC, sarà l'area del pentagono Fig 74

$$ADEFG = A\left(\frac{AF.BG}{AB.BC}+\frac{AE.CD}{AC.CB}+\frac{AF.AE}{AB.AC}\right).$$

Problema IX.

Misurare l' area dell' esagono DEFGHK *per via delle tre diagonali* DG, EH, FK.

Fig 75

Soluzione. Chiamando A l'area del triangolo ABC, che ha i suoi tre angoli all' intersezione delle diagonali, si avrà l'area dell' esagono $= A\left(\frac{AE.AF + AH.AK}{AB.AC} + \frac{BD.BK + BF.BG}{BA.BC} + \frac{CE.CD + CG.CH}{CA.CB} - 2\right)$.

Problema X.

Misurare l' area dell' esagono DEFGHK *per via de' lati* DK, GH, EF *continuati sino al mutuo incontro in* ABC.

Fig 76

Soluzione. Chiamando A l'area del triangolo ABC; l'area dell' esagono sarà $=$

$$A\left(1 - \frac{AH.AK}{AB.AC} - \frac{BF.BG}{BA.BC} - \frac{CD.CE}{CA.CB}\right).$$

Problema XI.

Misurare il poligono BCDEFG *colle intersezioni de' suoi lati continuati sino ai lati di un triangolo circoscritto, come nella Figura*.

Fig 77

Soluzione. Supposto che i lati BG, CD si taglino in A in maniera che il poligono resti compreso dentro il triangolo ABC, continuata la DE sino a che tagli la AB in H, e la EF in K; se si chiami A l'area ABC; sarà l'area del poligono $= A\left(1 - \frac{AD.AH}{AB.AC} - \frac{AD.HE.HK}{AC.HD.AB} - \frac{AD.HE.KF.KG}{AC.HD.KE.AB}\right)$.

Se si chiami S l'area ADH sarà l'area del poligono $=$
$$S\left(\frac{AB.AC}{AD.AH}-1-\frac{HE.HK}{HA.HD}-\frac{HE.KF.KG}{HA.HD.KE}\right).$$

Problemi sulle divisioni proporzionali

delle aree.

PROBLEMA XII.

Dividere il triangolo ABC *di area data in due aree di data ragione*,

Soluzione. Se la divisione si ha da fare per un angolo, per esempio per C; si divida la base opposta AB in D nella data ragione, e si conduca la CD. Fig 78

Se fosse dato un punto D sopra un lato AC pel quale dovesse passare la retta che divide il triangolo, e sia la data ragione, che si vuole di una parte al tutto quella di $p:t$; sulla CB si prenda $CE = \frac{p.CA.CB}{t.CD}$, e si guidi la DE; il triangolo CDE sarà questa parte. Se però CE riuscisse maggiore di CB; allora sulla AB si prenda Fig 79
$Ae = \frac{(t-p).AC.AB}{t.AD}$, e il quadrilatero $DCBe$ sarà questa parte.

Problema XIII.

Dividere il parallelogrammo ABCD *in due parti; sicchè una delle due parti stia al tutto come* p : t.

Fig 80

Soluzione. Se la divisione si vuol fare con una ce parallela ai lati; si prenda $BE = \frac{p \cdot AB}{t}$; il parallelogrammo $eBCc$ sarà la parte p.

Se la divisione si vuol fare per via di un angolo C colla CE; chiamando p la parte minore, si prenda $BE = \frac{2p \cdot AB}{t}$; il triangolo CEB sarà la parte p.

Se poi sia dato un punto P, sopra un lato AB, pel quale debba passare la retta, che divide il parallelogrammo; si prenda sul lato opposto CD la $CQ = \frac{2p \cdot AB}{t} - PB$, se PB è minore di $\frac{2P \cdot AB}{t}$. Se è maggiore, si prenda sulla BC la $BR = \frac{2p \cdot BA \cdot BC}{t \cdot BP}$. Se CQ riuscisse maggiore di CD; si prenda sulla AD la $AT = \frac{2(t-p)AB \cdot AD}{t \cdot AP}$. In tutti e tre i casi la parte omologa a p sarà la parte a destra di chi guarda la figura.

Fig 81

PROBLEMA XIV.

Dividere in una ragion data l'area del trapezio ABCD *per un punto* P *dato sopra uno de' due lati paralleli* AB, DC.

Fig 82

Soluzione. Si voglia che la parte $PQCB$ stia al tutto come $p : t$; dovrà prendersi QC

$$= \frac{p(AB + DC)}{t} - PB.$$

Se QC riuscisse negativo; si prenda

$$BR = \frac{p \cdot BC(AB + CD)}{t \cdot BP}.$$

Se riuscisse maggior di DC; si prenda

$$AT = \frac{(t - p)AD(AB + DC)}{t \cdot AP}.$$

PROBLEMA XV.

Dato un punto P *in uno de' due lati non paralleli del trapezio* ABCD, *assegnare il valore ai tre triangoli* ABP, BPC, CPD *per rapporto al tutto*.

Fig 83

Soluzione. Chiamando A l'area del trapezio; sarà

$$ABP = \frac{A \cdot AP \cdot AB}{(AB + DC)DA}$$

$$BPC = \frac{A \cdot (AB \cdot DP + AP \cdot DC)}{(AB + DC)DA}$$

$$CPD = \frac{A \cdot DP \cdot DC}{(AB + DC)DA}.$$

PROBLEMA XVI.

Dividere il trapezio ABCD *in due parti di una data ragione per un punto* P *preso sopra uno de' due lati non paralleli.*

Soluzione. Avendosi dal Probl. XV. i valori dei triangoli ABP, BPC, CPD per rapporto al tutto, sarà facile vedere sopra quale delle tre basi AB, BC, CD debba cadere la divisione, e il problema si ristringerà a dividere uno dei tre triangoli in una data ragione; sicchè basterà dividere in quella ragione la sua base in Q, o in R, ovvero in T.

PROBLEMA XVII.

Misurare l'area d'un quadrilatero ABCD, *che ha un angolo retto in* A.

Fig 84

Soluzione. Sia $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $DA = d$, sarà l'area del quadrilatero $= \frac{1}{2} ad + \frac{1}{4} \sqrt{[(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d) - 4a^2d^2 - 8abcd]}$.

PROBLEMA XVIII.

Misurare l'area d'un quadrilatero ABCD, *nel quale la somma di due angoli opposti è eguale a due retti; ossia il quadrilatero si può iscrivere nel cerchio.*

Fig 84

Soluzione. Denominando i lati come nel Probl. XVII.; sarà l'area del quadrilatero $= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}$.

PROBLEMA XIX.

Misurare l' area d' un rombo ABCD.

Soluzione. Condotte le due diagonali AC, BD, sarà l'area $= \frac{1}{2} AC . BD$. Fig 85

PROBLEMA XX.

Misurare l' area d' un poligono regolare.

Soluzione. Sia il lato AB del poligono regolare $= a$; il numero de' suoi lati $= n$; il raggio AC del cerchio circoscritto $= R$; il raggio NC del cerchio iscritto $= r$; l'area del poligono $= S$; si avrà Fig 86

$$S = \frac{1}{4} na^2 \text{cotang.} \frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2} n R^2 \text{sen.} \frac{360^\circ}{n} =$$
$$n r^2 \text{tang.} \frac{180^\circ}{n}.$$

PROBLEMA XXI.

Misurare l' area d' un cerchio di raggio o di circonferenza data.

Soluzione. Sia R il raggio, C la circonferenza, A l' area; il rapporto della circonferenza al diametro $= \pi = \frac{22}{7} = \frac{355}{113} = 3,1415926535$ si avrà

$$A = \frac{1}{2} RC = R^2 \pi = \frac{C^2}{4\pi}.$$

Problema XXII.

Misurare l'area d'un elisse.

Soluzione. Sia il suo semiasse maggiore $= M$; il semiasse minore $= N$; l'eccentricità ossia la distanza del centro da un foco $= C$; la sua area $= A$; si avrà
$A = MN\pi = M\pi\sqrt{(M^2 - C^2)} =$
$N\pi\sqrt{(N^2 + C^2)}$.

Problema XXIII.

Misurare la superficie d'una sfera.

Soluzione. Sia R il suo raggio, C la circonferenza d'un suo cerchio massimo; S la sua superficie. Si avrà

$$S = 2RC = 4R^2\pi = \frac{C^2}{\pi}.$$

Problema XXIV.

Misurare la superficie di un cono retto.

Soluzione. Sia R il raggio del cerchio della base; C la sua circonferenza; T l'altezza del cono; L il lato ossia la distanza del suo vertice da qualunque punto della circonferenza della base; S la sua superficie. Si avrà

$$S = \tfrac{1}{2}(L + R)C = (L + R)R\pi$$
$$= \tfrac{1}{2}(L + \frac{C}{2\pi})C = \tfrac{1}{2}(\sqrt{(T^2 + R^2)} + R)C$$
$$= (\sqrt{(T^2 + R^2)} + R)R\pi$$
$$= \tfrac{1}{2}(\sqrt{(T^2 + \frac{C^2}{4\pi^2})} + \frac{C}{2\pi})C.$$

Problema XXV.

Misurare la superficie di un cilindro retto.

Soluzione. Sia R il raggio, e C la circonferenza del cerchio della sua base; T l'altezza del cilindro; S la sua superficie. Si avrà

$$S = (\tfrac{1}{2} R + T) C = (\tfrac{1}{2} R + T) R\pi = (\frac{C}{4\pi} + T) C.$$

LIBRO QUARTO

Poligonometria.

DEFINIZIONE I.

Per angolo esterno d'un poligono intenderemo sempre l'angolo, che fa un lato del poligono colla continuazione dell'altro lato.

Sia per esempio il poligono $ABCD$. Per l'angolo esterno al punto D di questo poligono, che sarà da noi chiamato l'angolo D intenderemo sempre l'angolo ADc, che nel punto D è formato dal lato AD colla Dc, che è la continuazione del lato CD.

Fig. 87

DEFINIZIONE II.

Fig 87

Per angolo sporgentesi in un poligono s'intende quell'angolo, che volta la punta al di fuori come ABC, BCD, CDA (Fig. 87.)

Fig 88

Angolo rientrante è quello che volta la sua punta al di dentro come CDA (Fig. 88.)

L'angolo esterno dell'angolo rientrante CDA (Fig. 88.) cioè l'angolo ADc si noterà così $-D$ col segno negativo. Laddove l'angolo esterno dello sporgentesi CDA (Fig. 87.) cioè ADc si noterà così $+D$ col segno positivo.

Problema I.

Trovare una distanza A B *inaccessibile fuori che ne' due estremi* A, *e* B, *per via dei tre lati* BC, CD, DA, *e dei due angoli* C, *e* D *del poligono* ABCD.

Fig 87, e 88

Soluzione. Si avrà
$AB = \sqrt{(BC^2 + CD^2 + DA^2 + 2\,BC.CD\cos.C + 2CD.DA\cos.\pm D + 2BC.DA\cos.(C \pm D))}$
il segno + serve per la Fig. 87. e il — per l' 88.

Problema II.

Trovare la stessa distanza A B *per via de' quattro lati* BC, CD, DE, EA, *e dei tre angoli* C, D, E.

Fig 89, e 90

Soluzione. Sarà $AB =$
$\sqrt{[BC^2 + CD^2 + DE^2 + EA^2 + 2BC.CD\cos.C + 2CD.DE\cos.D + 2DE.EA\cos.\pm E + 2BC.DE\cos.(C+D) + 2CD.EA\cos.(D \pm E) + 2\,BC.EA\cos.(C + D \pm E)]}$
Il segno + vale per la Fig. 89. e il — per la 90.

Problema Generale Primo.

Trovare il lato incognito d' un poligono dati gli altri lati e tutti gli angoli eccetto i due adjacenti al lato incognito.

Soluzione.

Il lato incognito si troverà eguale alla radice della somma dei quadrati di tutti i lati cogniti; e de' doppj rettangoli di ciascun lato in ciascun altro moltiplicato rispettivemente nel coseno della somma degli angoli esterni intermedj dalla parte opposta al lato cercato.

PROBLEMA III.

Fig 87, 88

Trovare il lato AB *nel quadrilatero* ABCD *per via dei soli due lati* BC, CD *e degli angoli* A, D, C

Soluzione. Sarà

$$AB = \frac{DC\,\text{sen.} \pm D + CB\,\text{sen.}(\pm D + C)}{\text{sen.}\,A}.$$

PROBLEMA IV.

Fig 89, 90

Trovare il lato AB *nel pentagono* ABCDE *per via de' lati* BC, CD, DE *e degli angoli*.

Soluzione. Sarà $AB =$

$$\frac{ED\,\text{sen.} \pm E + DC\,\text{sen.}(\pm E + D) + CB\,\text{sen.}(\pm E + D + C)}{\text{sen.}\,A}$$

PROBLEMA GENERALE SECONDO.

Trovare un lato incognito d' un poligono, dati tutti gli altri lati eccetto uno dei due contigui al lato incognito, e tutti gli angoli.

Soluzione.

Si avrà il lato cercato presa la somma de' prodotti di tutti i lati dati moltiplicati ciascuno rispettivamente nel seno della somma degli angoli esterni intermedj posti tra esso e il lato incognito non cercato dalla parte opposta al lato cercato, e dividendo questa somma pel seno dell' angolo formato dai lati incogniti.

Problema V.

Trovare il lato A B *nel quadrilatero* ABCD *per via de' lati* B C, D A, *e degli angoli*. Fig 87 88

Soluzione. Sarà

$$AB = \frac{BC \,.\, \text{sen.}\, C - DA\, \text{sen.} \pm D}{\text{sen.}\,(\pm D + A)}$$

$$= \frac{DA\, \text{sen.} \pm D - BC \,.\, \text{sen.}\, C}{\text{sen.}\,(B + C)}.$$

Problema VI.

Trovare il lato A B *nel pentagono* A B C D E *per via de' lati* B C, D E, E A, *e degli angoli*. Fig 89 90

Soluzione. Sarà $AB =$

$$\frac{BC \,.\, \text{sen.}\, C - DE\, \text{sen.}\, D - EA\, \text{sen.}\,(D \pm E)}{(D \pm E + A)}$$

$$= \frac{DE \text{sen.}\, D + EA\, \text{sen.}\,(D \pm E) - BC\, \text{sen.}\, C}{\text{sen.}\,(B + C)}.$$

Problema VII.

Trovare il lato A B *nell' esagono* ABCDEF *per via de' lati* B C, C D, E F, F A, *e degli angoli*. Fg. 91

Soluzione, Sarà $AB =$

$$\frac{CD\, \text{sen.}\, D + BC\, \text{sen}\,(D + C) - FE\, \text{sen.}\, E - AF\, \text{sen.}\,(E + F)}{\text{sen.}\,(E + F + A)}$$

$$= \frac{FE\, \text{sen.}\, E + AF\, \text{sen.}\,(E + F) - CD\, \text{sen.}\, D - BC\, \text{sen.}\,(D + C)}{\text{sen.}\,(D + C + B)}$$

Problema Generale Terzo.

Trovare un lato incognito d' un poligono essendo dati tutti gli altri lati eccetto uno qualunque e tutti gli angoli.

Soluzione.

Si avrà il lato cercato prendendo la somma dei prodotti di ciascuno dei lati dati posti da una parte dei lati incogniti nel seno della somma degli angoli esterni intermedj tra esso lato cercato e il lato non dato; meno la somma dei simili prodotti dall' altra parte, e dividendo pel seno della somma degli angoli esterni intermedj ai due lati incogniti da questa parte.

Questo Problema Generale Terzo contiene il secondo.

Bisogna eccettuare il caso, nel quale i due lati incogniti fossero paralleli; nel quale il Problema riesce indeterminato.

Problema VIII.

Fig 87 88

Misurare l'area del quadrilatero ABCD *per via dei tre lati* BC, CD, DA, *e dei due angoli* C, *e* D.

Soluzione. Sarà l'area

$= \frac{1}{2} BC . CD \text{ sen. } C + \frac{1}{2} CD . DA \text{ sen. } \pm D + \frac{1}{2} BC . DA \text{ sen.} (C \pm D)$.

Problema IX.

Misurare l'area del pentagono ABCDE *per via de' lati* BC, CD, DE, EA, *e degli angoli* C, D, *ed* E.

Fig 89 90

Soluzione, Sarà l'area

$= \frac{1}{2} BC . CD \text{ sen. } C + \frac{1}{2} CD . DE \text{ sen. } D$
$+ \frac{1}{2} DE . EA \text{ sen. } \pm E$
$+ \frac{1}{2} BC . DE \text{sen.} (C + D) + \frac{1}{2} CD . EA \text{sen.} (D \pm E)$
$+ \frac{1}{2} BC . EA \text{ sen. } (C + D \pm E)$.

Problema Generale Quarto.

Misurare l'area d'un poligono per via de' lati, e degli angoli.

Soluzione. Non prevalendosi di un suo lato, ne dei due angoli adjacenti ad esso; sarà l'area eguale alla semisomma dei prodotti di ciascun lato in ciascun altro, e nel seno della somma degli angoli esterni intermedj ad essi due lati.

Scolio.

Se il poligono sarà di molti lati come *ABCDEFGH* sarà più spedito supporlo diviso in due con una diagonale come *AE* la quale formi i due poligoni *ABCDE*, *EFGHA*, che o abbiano lo stesso numero di lati, o si superino di un solo, e calcolarli separatamente non prevalendosi del lato *AE* comune ad entrambi nè degli angoli adjacenti al medesimo.

Fig 93

Problema X.

Nel quadrilatero ABCD *trovare gli angoli* A, *e* B *adjacenti al lato incognito* AB.

g 87 88

Soluzione. Sarà

$$\text{tang. } ABC = \frac{CD \text{ sen. } C + DA \text{ sen. } (C \pm D)}{BC + CD \cos. C \mp DA \cos. (C \pm D)}$$

$$\text{tang. } BAD = \frac{DC \text{ sen. } \pm D + CB \text{ sen. } (C \pm D)}{AD + DC \cos. D + CB \cos. (C \pm D)}$$

Problema XI.

Nel pentagono ABCDE *trovare gli angoli* A, *e* B *adiacenti al lato incognito* AB.

g 89 99

Soluzione. Sarà

$$\text{tang. } ABC = \frac{CD \text{ sen. } C + DE \text{ sen. } (C + D) + EA \text{ sen. } (C + D \pm E)}{BC + CD \cos. C + DE \cos. (C + D) + EA \cos. (C + D \pm E)}$$

$$\text{tang. } BAE = \frac{ED \text{ sen } \pm E + DC \text{ sen. } (\pm E + D) + CB \text{ sen. } (\pm E + D + C)}{AE + ED \cos. E + DC \cos. (\pm E + D) + CB \cos. (\pm E + D + C)}$$

Problema Generale Quinto.

Trovare in un poligono due angoli incogniti adjacenti ad un lato incognito; dati tutti gli altri angoli e lati.

Soluzione.

Si avrà la tangente di ciascun angolo interno incognito dividendo la somma de' prodotti di ciascun lato non formante l'angolo incognito nel seno della somma degli angoli esterni posti tra esso e il lato cognito dell' angolo incognito per la somma de' prodotti di ciascuno de' medesimi lati nel coseno della somma de medesimi angoli aggiuntovi il lato cognito dell' angolo incognito.

Pro-

Problema XII.

Nel quadrilatero ABCD *trovare il lato* CD, *e gli angoli* A, *e* B *dati gli altri lati ed angoli.*

Fig 87

Soluzione. Sarà $CD =$
$\sqrt{(AB^2 - (AD \text{ sen. } D - BC \text{ sen. } C)^2)} - AD \cos. D - BC \cos. C$

$\text{tang. } BAD =$
$[\text{sen. } D \sqrt{(AB^2 - (AD \text{ sen. } D - BC \text{ sen. } C)^2)} - (AD \text{ sen. } D - BC \text{ sen. } C) \cos. D]$:
$[\cos. D \sqrt{(AB^2 - (AD \text{ sen. } D - BC. \text{sen. } C)^2)} + (AD \text{ sen. } D - BC \text{ sen. } C) \text{ sen. } D]$

$\text{tang. } ABC =$
$[\text{sen. } C \sqrt{(AB^2 - (AD \text{ sen. } D - BC \text{sen. } C)^2)} + (AD \text{ sen. } D - BC \text{ sen. } C) \cos. C]$:
$[\cos. C \sqrt{(AB^2 - (AD \text{ sen. } D - BC \text{sen. } C)^2)} - (AD \text{ sen. } D - BC \text{ sen. } C) \text{ sen. } C]$.

Per la Fig. 88. si scriva $-D$ in luogo di D.

Problema Generale Sesto.

Trovare in un poligono due angoli adjacenti ad un lato cognito, e un lato qualunque incognito.

Soluzione.

Dal Problema Generale Primo si ha quest' equazione: il quadrato del lato interposto agli angoli incogniti = alla somma dei quadrati degli altri lati più i doppj rettangoli di ciascuno di questi in ciascun altro moltiplicati rispettivamente nel coseno della somma degli angoli esterni intermedj tra lor due dalla parte opposta al lato primo. Da questa equazione del secondo grado è facile ricavare il lato incognito.

Trovato il lato incognito, si troveranno i due angoli incogniti per mezzo del Problema Generale Quinto.

PROBLEMA GENERALE SETTIMO.

Trovare nel qualunque poligono ABCDEFGHI *un lato* HG, *e due angoli per esempio* A, D *non successivi nè adjacenti al lato.*

Fig 92

Soluzione.

Si tiri una diagonale pei due angoli incogniti A, e D. Nel poligono $ABCD$ di lati tutti cogniti eccetto la AD, e di angoli pure cogniti eccetto i due adjacenti alla AD, per mezzo del Problema Generale Primo si trovi la AD, e per mezzo del Problema Generale Quinto si trovino i due angoli adjacenti ad essa BAD, ADC.

Nel poligono $ADEFGHI$ posto dall' altra parte della diagonale AD, nel quale vi è il lato incognito HG, per mezzo del Problema Generale Sesto si trovino i due angoli IAD, ADE adjacenti alla AD, e il lato incognito HG.

Oltre il lato HG si avrà ancora $IAB = IAD + BAD$, e $CDE = ADC + ADE$.

Problema Generale Ottavo.

In qualunque poligono ABCDEFGHI *trovare tre angoli qualunque* A, D, G *dati gli altri angoli e tutti i lati.* Fig 32

Soluzione.

Descritto il triangolo *ADG* si trovino i suoi lati per mezzo del Problema Generale Primo impiegando i tre poligoni *ABCD*, *DEFG*, *GHIA*, che hanno gli altri lati ed angoli cogniti sul perimetro del poligono proposto. In questi tre poligoni per mezzo del Problema Generale Quinto si trovino pure gli angoli *BAD*, *CDA*; *GDE*, *DGF*; *HGA*, *GAI*.

Per mezzo dei lati del triangolo *AGD* si trovino i suoi angoli colla Trigonometria. Quindi si avranno *IAB*, *CDE*, *FGH*.

Tali sono i problemi del mio *metodo di misurare i poligoni piani* stampati l'anno 1787. in Pavia, i quali comprendono tutti i problemi della Poligonometria di M. L'Huilier stampata in Ginevra l'anno 1789.

AGGIUNTA

Per la maggiore generalità de' Problemi precedenti.

Gli angoli de' poligoni sono stati quì sopra divisi in sporgentisi, e rientranti, essendosi assegnato il segno + agli angoli esterni degli sporgentisi, e il segno — agli esterni dei rientranti.

Ma se queste due specie di angoli si vorranno considerare sotto un altro aspetto; ne nascerà una regola facile non solo pel calcolo de' poligoni, che abbiamo già esaminati; ma ancora per altre linee che seguendosi l'una l'altra sino a che si torni da capo s'incrocicchiano e per gli angoli, che esse formano tra loro come si vedrà dagli esempj.

Quando gli angoli d'un poligono sono tutti sporgentisi; si troverà, che seguitando il giro del poligono incominciando da qualche suo punto, quando si passa da un lato all'altro si piega sempre dalla stessa parte. Per esempio nel poligono *ABCDE* Fig. 89. andando da *A* verso *B*, quando al punto *B* si entra sul lato *BC*, si fa una deviazione a destra dal lato *AB*. Egualmente quando si è in *C* entrando sul lato *CD* si fa un'altra deviazione a destra dal lato *BC*, e così di seguito; cosicchè essendo tutti gli angoli sporgentisi si devia sempre a destra a tutti gli angoli, finchè compito il perimetro si ritorna in *A*.

Al contrario nel poligono *ABCDE* Fig. 90. dove l'angolo *E* è rientrante cominciando il giro da *A* in *B*, e seguitando il perimetro finchè si torni in *A*, si troverà che in *B*, in *C*, e in *D* si devia a destra; ma che in *E* dove è l'angolo rientrante, si devia a sinistra; che giunti che siamo in *A* e rientrando sul lato *AB* si torna a deviare a destra appunto perchè l'angolo *A* è uno degli sporgentisi.

Si troverà pure, che l'angolo di deviazione è appunto l'angolo, che noi abbiamo chiamato esterno, ossia l'angolo, che è formato

dalla continuazione d'un lato del poligono col lato susseguente. Così nella Fig. 89. e 90. l'angolo di deviazione in E è l'angolo dEA.

Se il giro del poligono si facesse sul verso contrario; cioè se per esempio nelle Fig. 89. e 90. si andasse da A in E, da E in D, da D in C ec.; si troverebbe che gli angoli sporgentisi hanno una deviazione a sinistra e gli angoli rientranti l'hanno a destra.

Si dirà dunque in generale che gli angoli sporgentisi, e gli angoli rientranti hanno tra loro una deviazione contraria. Che gli angoli sporgentisi hanno una deviazione verso l'interno del poligono; e i rientranti verso l'esterno.

Si troverà pure che la somma degli angoli esterni intermedj a due lati non è altro che la deviazione di un lato dall' altro. Così nella Fig. 89. $B + C$ non è altro che la deviazione del lato CD dal lato AB, essendosi deviato prima in B per la quantità dell' angolo B; poi in C per la quantità dell' angolo C per porsi sulla direzione CD. Nella Fig. 90. $B + C + D - E$ non è altro se non la deviazione del lato EA dal lato AB.

Alla deviazione interna si è dato il segno $+$ e all' esterna il segno $-$.

Considerando gli angoli esterni sotto l'aspetto di angoli di deviazione nella maniera fin quì spiegata; in vece del primo problema generale si può sostituire il seguente anche più generale; poichè non solo abbraccerà tutti i casi del primo problema generale, ma ancora i casi degli esempj che gli si soggiungeranno ed altri simili.

Nuovo Problema Generale Primo.

Posto che più rette sieno poste ad angoli tra loro una dietro l'altra successivamente in maniera che l'ultima di esse colla sua estremità si unisca ad angolo col principio della prima, ed una d'esse sia incognita come pure gli angoli tra quali è posta; tutte le altre rette poi e gli altri angoli sieno cogniti; trovare la retta incognita.

Soluzione.

La retta incognita interposta agli angoli incogniti si troverà eguale alla radice della somma de' quadrati di tutti i lati cogniti, e de' doppj rettangoli di ciascun lato in ciascun altro moltiplicati rispettivamente nel coseno della loro mutua deviazione.

Esempio I.

Fig 94. Siano date di lunghezza e di posizione le tre rette BC, CD, DA, e i loro angoli BCD, CDA; trovare la retta AB, che nella Figura interseca la DC tra D, e C.

Se si scorrano successivamente i tre lati BC, CD, DA andando da B in A, ovvero da A in B si troveranno gli angoli di deviazione in C, e D essere in un verso contrario l'uno all' altro. Dando ad uno di essi ad arbitrio il segno positivo e all' altro il negativo; per esempio il positivo a C; si avrà come per la Fig. 88.

$$AB = \surd [BC^2 + CD^2 + DA^2 + 2BC.CD \cos. C + 2CD.DA \cos. D + 2BC.DA \cos. (C - D)].$$

Esempio II.

Sieno misurate le quattro strade rette AE, ED, DC, CB, e gli angoli, che esse fanno tra loro in E, D, e C; trovare la distanza de' due punti A, e B.

Fig 95

Essendo la deviazione in E contraria alle deviazioni in D, e C, e però dandole segno contrario si avrà come per la Fig. 90.

$$AB = \sqrt{[} BC^2 + CD^2 + DE^2 + EA^2 + 2BC \,.\, CD \cos. C + 2CD \,.\, DE \cos. D + 2DE \,.\, EA \cos. E + 2BC \,.\, DE \cos. (C + D) + 2CD \,.\, EA \cos. (D - E) + 2BC \,.\, EA \cos. (C + D - E)]\,.$$

Egualmente quì si potrebbero sostituire altri problemi più generali in luogo di quelli che sono stati posti quì sopra. Per far questo basterà che negli antecedenti problemi generali, in luogo di *poligono* si sostituisca l'espressione: *sistema di più rette poste ad angoli tra loro una dietro l'altra successivamente in maniera, che l'ultima di esse colla sua estremità si unisca ad angolo col principio della prima*. Così pure in luogo di angoli *sporgentisi* o *rientranti* si sostituisca *angoli* di *deviazione positiva* o *negativa*.

In questa guisa sulla Fig. 94. avranno luogo tutti i problemi proposti sulla Fig. 88., e sulla Fig. 95. tutti i proposti sulla Fig. 90. senza che qui se ne ripetano inutilmente gli esempj. Solo sarà utile fissare alcune regole generali che nascono dalla diversità delle figure.

REGOLA PRIMA.

Quando nell' espressione del valore dell' incognita non entrano se non i coseni della deviazione; è indifferente chiamare una deviazione piuttosto positiva che negativa, essendo cos. $A =$ cos. $-A$. Nell' aggregato però delle deviazioni converrà dare segno contrario alle deviazioni contrarie essendo cos. $(A+B)$ diverso da cos. $(A-B)$. Un caso di questa regola l'abbiamo già veduto ne' due esempj del nuovo Problema Generale Primo.

REGOLA SECONDA.

Quando nell' espressione del valore dell' incognita ci entrano i seni della deviazione; e l' incognita è una linea retta o un angolo; ancora sarà indifferente chiamare una deviazione piuttosto positiva che negativa; posto però che alla contraria si dia il segno contrario, tanto se è sola quanto se è unita con altre. Il valore, che se ne avrà per l' incognita in un caso e nell' altro non sarà diverso se non nel segno. Questa diversità indicherà appunto la direzione del lato e la deviazione dell' angolo che si cercavano, e che riescon diverse secondo le due denominazioni diverse che si son prese degli angoli dati.

Esempio I.

Fig. 95 Sieno note le lunghezze delle quattro strade AE, ED, DC, CB, e i loro angoli in

E, D, C; e non si possa traguardare da B in A. Si vorrebbe fare una strada diritta da B in A. Per quest' oggetto si desidera l' angolo GBA.

Siccome a questa Figura 95. sono applicabili tutte le formole della Figura 90; si avrà come nel Probl. XI.

$$\text{tang. } ABC = \frac{CD \text{ sen. } C + DE \text{ sen. } (C + D) + EA \text{ sen. } (C + D - E)}{BC + CD \cos. C + DE. \cos (C + D) + EA \cos. (C + D - E)}$$

Essendosi quì presa positiva la deviazione in C, ed essendo dello stesso genere la deviazione in B; se il valore di tang. ABC riesce positivo; sarà l' angolo ABC minor d' un retto. Se riesce negativo; sarà maggiore. Tutto appunto come nella Fig. 90.

Esempio II.

Si voglia ora fare la stessa strada ma cominciando da A verso B. Si desidera l' angolo EAB.

Applicando anche quì la formola della Fig. 90. Probl. XI. si avrà

$$\text{tang. } BAE = \frac{ED \text{ sen. } - E + DC \text{ sen. } (D - E) + CB \text{ sen. } (C + D - E)}{AE + ED \cos. E + DC \cos. (D - E) + CB \cos. (C + D - E)}$$

Essendosi quì presa negativa la deviazione in E; ed essendo dello stesso genere la deviazione in A; se il valore di tang. BAE riesce positivo; sarà quì (al contrario dell' esempio 1.) l' angolo BAE maggior d' un retto; se riesce negativo, sarà minore. Il che segue anche al contrario di quello che si ha nella Figura 90 dove la deviazione in A è di diverso genere della deviazione in E.

In questi due esempj si vede, che si poteva egualmente prendere in senso contrario le due deviazioni in C, e in E cangiando tutti i segni nelle espressioni degli angoli che stanno sotto il carattere *sen.* cioè scrivendo sen. $-C$; sen. $(-C-D)$; sen. $(-C-D+E)$; pel primo esempio, e sen. E; sen. $(E-D)$; sen. $(E-D-C)$ pel secondo. Allora le tangenti acquistavano il segno contrario, il che riusciva conforme alla qualità dei loro angoli, che avrebbero acquistato diverso genere di deviazione.

REGOLA TERZA.

In quei sistemi di molte rette, nei quali due qualunque rette non consecutive si tagliano come nella Fig. 94. dove la DC taglia la AB in x, e nella 95. dove la DE taglia pure la AB in x; applicandovi la soluzione del Problema Generale Quarto nel quale si cerca l'area, non si avrà la somma delle aree opposte al vertice nell'incrocicchiamento x, ma la loro differenza, cioè il residuo, che nasce dalla sottrazione delle aree, nelle quali le deviazioni prese negative riescono gli angoli esterni degli sporgentisi, dalle aree nelle quali gli angoli esterni degli sporgentisi coincidono colle deviazioni positive. Per esempio l'espressione $\frac{1}{2} BC.CD$ sen. $C + \frac{1}{2} CD.DA$ sen. $-D$ $+ \frac{1}{2} BC.DA$ sen. $(C-D)$ applicata alla Fig. 94. indica l'area $BCx - xDA$.

Misura de' poligoni per via di una base.

Daremo quì la maniera di potere in qualunque poligono

Trovare	Dati
I. La superficie II. I lati III. Gli angoli	Un lato del poligono, e gli angoli, che fa questo lato colle diagonali che passano pei due estremi di questo lato, e coi lati contigui.

PROBLEMA I.

Trovare la superficie.

Soluzione. Primo. Si divida il poligono in tanti triangoli, che abbiano tutti il vertice ad uno de i due estremi di quel lato che si prende per base.

Secondo. Si trovi l'espressione generale di ciascuno di essi triangoli, come si insegnerà quì subito appresso.

Terzo. Si sommino o si sottraggano essi triangoli secondo, che converrà alla figura del poligono, Tutto s' intenderà meglio dagli esempj.

Esempio I.

Sia data la base AB del poligono $ABCDEF$, che ha gli angoli tutti sporgentisi, e sieno dati tutti gli angoli fatti colla medesima AB in A, e B dalle diagonali AC, AD, AE, BD, BE, BF, e dai due lati AF, BC contigui ad essa base AB. Si avrà per questo stesso

Fig 96

Primo: il poligono diviso nei triangoli BCD, BDE, BEF, BFA, che hanno tutti il vertice in B; ovvero, se più piaccia se lo avrà diviso nei triangoli ACB, ADC, AED, AFE, che hanno tutti il vertice in A.

Secondo: l'espressione di uno qualunque di questi triangoli; per esempio del triangolo BDE si avrà, moltiplicando la metà del quadrato della base AB per una frazione il numeratore della quale è il prodotto de' due seni degli angoli che fanno colla base AB all'estremo A dove non è il vertice del triangolo le diagonali DA, EA, che passano pei due angoli del triangolo; il denominatore poi è il prodotto dei due seni degli angoli che fanno le stesse diagonali DA, EA coi lati del triangolo DB, EB; e di nuovo moltiplicando pel seno dell'angolo che forman tra loro i due lati del triangolo all'estremo della base in B; cioè sarà

l'area $DBE = \frac{1}{2} AB^2 \frac{\text{sen.}\, DAB\, \text{sen.}\, EAB}{\text{sen.}\, ADB\, \text{sen.}\, AEB}\, \text{sen.}\, DBE$

Questa espressione si semplifica pel triangolo, che ha per lato la base AB per esempio pel triangolo FBA; l'area del quale si ha moltiplicando la metà del quadrato della stessa AB pel prodotto dei seni dei due angoli in A, e B e dividendo pel seno dell' angolo opposto ad AB; cioè si ha

$$\text{l'area } FBA = \tfrac{1}{2} AB^2 \frac{\text{sen.}\, FAB\, \text{sen.}\, FBA}{\text{sen.}\, AFB}.$$

Terzo: Sarà dunque sommando i triangoli BCD, BDE, BEF, BFA l'area del poligono $ABCDEF =$

$$\tfrac{1}{2}AB^2 \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{sen. } CAB \text{ sen. } DAB \text{ sen. } CBD}{\text{sen. } ACB \text{ sen. } ADB} + \\ \frac{\text{sen. } DAB \text{ sen. } EAB \text{ sen. } DBE}{\text{sen. } ADB \text{ sen. } AEB} + \\ \frac{\text{sen. } EAB \text{ sen. } FAB \text{ sen. } EBF}{\text{sen. } AEB \text{ sen. } AFB} + \\ \frac{\text{sen. } FAB \text{ sen. } FBA}{\text{sen. } AFB} \end{array} \right\}.$$

Egualmente sommando i triangoli ACB, ADC, AED, AFE sarà la stessa area =

$$\tfrac{1}{2}AB^2 \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{sen. } CBA \text{ sen. } CAB}{\text{sen. } BCA} + \\ \frac{\text{sen. } CBA \text{ sen. } DBA \text{ sen. } CAD}{\text{sen. } BCA \text{ sen. } BDA} + \\ \frac{\text{sen. } DBA \text{ sen. } EBA \text{ sen. } DAE}{\text{sen. } BDA \text{ sen. } BEA} + \\ \frac{\text{sen. } EBA \text{ sen. } FBA \text{ sen. } EAF}{\text{sen. } BEA \text{ sen. } BFA} \end{array} \right\}.$$

Esempio II.

Sia data la base del poligono $ABCDEF$, che ha l'angolo DEF rientrante. Condotte al punto B da tutti gli angoli del poligono le DB, EB, FB, e dagli stessi al punto A le CA, DA, EA; si avrà l'area del poligono eguale alle aree $CBD + DBE + EBF + FBA$, come pure eguale alle aree $CBA + DCA - EDA + FEA$. Si avrà dunque l'area $ABCDEFA =$

Fig 97

$$\tfrac{1}{2}AB^2\times\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\text{sen. }CAB\text{ sen. }DAB\text{ sen. }CBD}{\text{sen. }ACB\text{ sen. }ADB}+\\ \dfrac{\text{sen. }DAB\text{ sen. }EAB\text{ sen. }DBE}{\text{sen. }ADB\text{ sen. }AEB}+\\ \dfrac{\text{sen. }EAB\text{ sen. }FAB\text{ sen. }EBF}{\text{sen. }AEB\text{ sen. }AFB}+\\ \dfrac{\text{sen. }FAB\text{ sen. }FBA}{\text{sen. }AFB}\end{array}\right\}.$$

La stessa area sarà =

$$\tfrac{1}{2}AB^2\times\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\text{sen }CBA\text{ sen. }BAC}{\text{sen. }BCA}+\\ \dfrac{\text{sen. }CBA\text{ sen. }DBA\text{ sen. }CAD}{\text{sen. }BCA\text{ sen. }BDA}-\\ \dfrac{\text{sen. }DBA\text{ sen. }EBA\text{ sen. }DAE}{\text{sen. }BDA\text{ sen. }BEA}+\\ \dfrac{\text{sen. }EBA\text{ sen. }FBA\text{ sen. }EAF}{\text{sen. }BEA\text{ sen. }BFA}\end{array}\right\}:$$

Problema II.

Trovare i lati.

Soluzione. Servono a questo le due soluzioni 14. e 15. del Problema III. del Libro I.

Fig 96 97

Per esmpio se si voglia trovare il lato DE basterà sostituire nelle formole di esse soluzioni la lettera E in luogo della lettera X, e la D in luogo della Z.

Problema III.

Trovare gli angoli.

Fig 96 97

Soluzione. S' intenderà meglio la regola da un esempio. Si voglia l'angolo CDE. Si avrà l'angolo CDA per via dell' equazione

$$\text{tang. } CDA = \frac{\text{sen. } DAB - \frac{\text{sen. } CAB}{\text{sen. } ACB} \text{ sen. } (DAB + CBA)}{\frac{\text{sen. } DBA}{\text{sen. } BDA} + \cos. DAB + \frac{\text{sen. } CAB}{\text{sen. } ACB} \cos. (DAB + CBA)} :$$

Si avrà pure l'angolo BDE per via dell' equazione

$$\text{tang. } BDE = \frac{\text{sen. } DBA - \frac{\text{sen. } EBA}{\text{sen. } BEA} \text{ sen. } (DBA + EAB)}{\frac{\text{sen. } DAB}{\text{sen. } BDA} + \cos. DBA + \frac{\text{sen. } EBA}{\text{sen. } BEA} \cos. (DBA + EAB)} .$$

Dalla somma trovata $BDA + BDE$ si sottragga l' angolo BDA; si avrà l'angolo cercato CDE.

LIBRO QUINTO

Della misura de i solidi.

Problema I.

Misurare un prisma o un cilindro.

Soluzione. Si moltiplica la sua base per l'altezza; il prodotto dà la solidità del prisma o del cilindro. Sia la base $= b$; l'altezza $= a$; sarà la solidità $s = ab$.

Problema II.

Misurare una piramide o un cono.

Soluzione. Si moltiplica la base per l'altezza, e si prende il terzo. Sia la base $= b$; l'altezza $= a$; sarà la solidità $s = \frac{1}{3} a b$.

Problema III.

Misurare una piramide tronca o un cono tronco.

Soluzione. Si sommano le due basi parallele; si aggiunge a questa somma una base, che sia media proporzionale tra le due basi; quest' aggregato si moltiplica pel terzo dell' altezza della piramide tronca o del cono tronco, e si si ha la sua solidità. Sia la base inferiore $= B$; la superiore $= b$; l'altezza del tronco $= a$; sarà la sua solidità $s = \frac{1}{3} a (B + b + \sqrt{Bb})$.

Problema IV.

Trovare la solidità d' una sfera.

Soluzione. Si ha moltiplicando la sua superficie pel terzo del raggio. Sia il raggio della sfera $= r$, la circonferenza d'un suo cerchio massimo $= c$; la superficie della sfera $= s$; il rapporto della circonferenza al diametro $= \pi = \frac{22}{7} = \frac{355}{113} = 3,1415926535$. Sarà la solidità della sfera $S = \frac{1}{3} rs = \frac{2}{3} r^2 c = \frac{4}{3} r^3 \pi$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{cs}{\pi} = \frac{1}{6} \cdot \frac{c^3}{\pi^2}$$

$$= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{s^3}{\pi}}.$$

Problema V.

Misurare la solidità d' un settore di sfera.

Soluzione. Si moltiplica la superficie sferica del settore pel terzo del raggio della sfera.

Sia il raggio della sfera $= R$; il raggio del cerchio che termina la superficie sferica del settore $= r$; la sua circonferenza $= c = 2 r \pi$. Sarà la solidità del settore $= \frac{2}{3} R^3 \pi [1 - \sqrt{(1 - \frac{r^2}{R^2})}] = \frac{2}{3} R^3 \pi [1 - \sqrt{(1 - \frac{c^2}{4\pi^2 R^2})}]$.

Problema VI.

Misurare la solidità d' un segmento sferico.

Soluzione. Si moltiplichi la superficie sferica del segmento pel terzo del raggio. Da questo

prodotto si sottragga la solidità del cono, che ha la stessa base col segmento e il vertice al centro della sfera.

Sia il raggio della sfera $= R$; il raggio del cerchio, che termina la superficie sferica, cioè della base del segmento $= r$; l'altezza del segmento $= a$. Sarà la solidità del segmento $= \frac{a^2 \pi}{3} (3R - a) = \frac{a\pi}{6} (3r^2 - a^2)$.

Problema VII.

Misurare una piramide per via de' lati.

Soluzione. Sia la piramide $ABCD$ e sia

Fig 98

$$AB = b \qquad BC = f$$
$$AC = c \qquad CD = g$$
$$AD = d \qquad BD = k$$

sarà la solidità della piramide $=$

$$\frac{1}{12} \sqrt{\left\{ \begin{array}{l} + bbgg(cc + dd + ff + kk - bb - gg) \\ + cckk(bb + dd + ff + gg - cc - kk) \\ + ddff(bb + cc + gg + kk - dd - ff) \\ - bbccff - bbddkk - ccddgg - ffggkk \end{array} \right\}}.$$

Corollario I.

Se sarà $AB = AC$; $DB = DC$; sarà la solidità $= \frac{1}{12} f \sqrt{(2b^2 g^2 + 3b^2 d^2 + 2d^2 g^2 - b^4 - d^4 - g^4 - d^2 f^2)}$ e se l'area del triangolo $ABD = ADC$ si chiami A; sarà la solidità della piramide $=$

$$\frac{1}{12} f \sqrt{(16 A^2 - d^2 f^2)}$$

Corollario II.

Se sarà $AB = AC = DB = DC$; sarà la solidità =

$$\frac{1}{12} fd\sqrt{(4b^2 - d^2 - f^2)}$$

Corollario III.

Se sarà $AB = AC = AD$; $BC = CD = BD$; sarà la solidità =

$$\frac{1}{12} f^2 \sqrt{(3b^2 - f^2)}$$

Corollario IV.

Se tutti i lati saranno eguali; sarà la solidità =

$$\frac{1}{12} (AB)^3 \sqrt{2}$$

Scolio.

Possono servire le formole di questi corollarj per avere speditamente la solidità di poliedri di facce triangolari, i quali abbiano qualche regolarità. Si supponga per esempio che intorno alla AD come ad asse sieno poste delle piramidi tutte simili alla $ABCD$, che ha le condizioni del corollario 1. si avrà subito la solidità del poliedro moltiplicando la formola del corollario 1. nel numero delle piramidi.

Problema VIII.

Misurare la solidità d' una piramide per via di tre lati, che concorrono in uno de' suoi angoli solidi, e dei tre angoli piani che essi formano.

Soluzione. Sia la piramide $ABCD$ e sia

Fig 98

$$AB = b \qquad BAC = p$$
$$AC = c \qquad BAD = q$$
$$AD = d \qquad CAD = r$$

sarà la solidità della piramide $=$

$$\tfrac{1}{6} bcd \sqrt{(1 - \cos.^2 p - \cos.^2 q - \cos.^2 r + 2 \cos. p \cos. q \cos. r)}$$

$$= \tfrac{1}{3} bcd \sqrt{(\text{sen.} \frac{p+q+r}{2} \text{ sen.} \frac{p+q-r}{2} \times \text{sen.} \frac{p-q+r}{2} \text{ sen.} \frac{q+r-p}{2})}$$

$$= \tfrac{1}{6} bcd \sqrt{[(\cos.(r-p) - \cos. q)(\cos. q - \cos.(r+p))]}.$$

Corollario.

Se sarà $p = q = r$; la solidità sarà $=$

$$\frac{1}{6} bcd \sqrt{(1 - 3 \cos.^2 p + 2 \cos.^3 p)} =$$

$$\frac{bcd}{12} \sqrt{2(\cos.3p - 3 \cos.2p + 3 \cos.p - 1)} =$$

$$\frac{bcd}{3} \sqrt{\text{sen.} \; 3 \frac{p}{2} . \text{ sen.}^3 \frac{p}{2}}$$

Problema IX.

Misurare la solidità d'un corpo, che ha due basi opposte ABCD, abcd *parallele cogli angoli tutti sporgentisi, e quattro facce laterali* ABba, BCcb, CDdc, DAad *piane poste comunque.*

Fig. 99

Soluzione 1. Si misurino due angoli opposti nelle basi, per esempio B, e D, che saranno rispettivamente eguali agli angoli b, e d; si misurino pure tutti i lati nelle due basi, e l'altezza del corpo, ossia la distanza delle due basi parallele; la quale si chiami P. Si avrà la solidità

$$= \tfrac{1}{6} P \,\text{sen.} ABC\left[AB(BC + \tfrac{1}{2} bc) + ab(bc + \tfrac{1}{2} BC)\right]$$
$$+ \tfrac{1}{6} P \,\text{sen.} ADC\left[CD(DA + \tfrac{1}{2} da) + cd(da + \tfrac{1}{2} DA)\right]$$

Scolio I.

Se si concepisce che la diagonale, che passa per a, e c radesse le due aA, cC stando sempre in un piano parallelo alle basi finchè venisse in AC; essa dividerebbe il solido in due parti, delle quali quella che contiene l'angolo ABC avrebbe per misura della sua solidità

$$\tfrac{1}{6} P \,\text{sen.} ABC\left[AB(BC + \tfrac{1}{2} bc) + ab(bc + \tfrac{1}{2} BC)\right]$$

e l'altra che contiene l'angolo ADC sarebbe misurata dall' altra espressione

$$\tfrac{1}{6} P \,\text{sen.} ADC\left[CD(DA + \tfrac{1}{2} da) + cd(da + \tfrac{1}{2} DA)\right]$$

Se le Aa, Cc non sono nello stesso piano; la superficie descritta dal movimento della diagonale ac non sarà un piano.

Quindi si ha un metodo di misurare la solidità d'una specie di piramide triangolare troncata, che ha le due basi *ABC*, *abc* parallele, e due facce piane *ABba*, *CBbc*, e la terza *ACca* o piana o no; ma però tale, che ogni sezione del solido, che si faccia parallela alle basi riesca anch' essa un triangolo rettilineo. La sua solidità è espressa dalla prima delle due formole poste quì sopra.

Scolio II.

Se due angoli solidi, per esempio *a*, e *b* coincidessero, e che per conseguenza due facce *ABba*, *dcba* di quadrilatere diventassero triangolari; basterà nell' espressione della solidità porre $ab = o$.

Soluzione 2. Vedi lo Scolio del Probl. XI.

Problema X.

Fig 10. *Misurare la solidità d'un corpo, che ha tutte le condizioni del Problema precedente, se non che ha un angolo nelle basi rientrante, per esempio l'angolo* DCB.

Soluzione 1. Se si misurino come nella soluzione 1. del Problema IX. que' due angoli opposti nelle basi, che sono entrambi sporgentisi, come *ADC*, *ABC*, e sia la distanza delle due basi parallele $= P$; si avrà la sua solidità espressa dalla stessa formola del Problema precedente IX.

Soluzione 2. Se si misurino i due angoli opposti uno de' quali è sporgentesi come DAB, e l'altro rientrante come DCB; l'espressione della solidità sarà analoga, se non che il seno dell'angolo rientrante avrà il segno $-$, e si avrà la solidità

$$= \frac{1}{6} P \text{ sen.} DAB[DA(AB + \tfrac{1}{2} ab) + da(ab + \tfrac{1}{2} AB)]$$
$$- \frac{1}{6} P \text{ sen.} DCB[DC(CB + \tfrac{1}{2} cb) + dc(cb + \tfrac{1}{2} CB)]$$

Soluzione 3. Vedi lo Scolio del Probl. XI.

Scolio.

Nei problemi precedenti è stato indifferente prendere un angolo per esempio ABC Fig. 99. del poligono $ABCD$, ovvero il suo supplemento, essendovisi impiegato il seno, il quale è lo stesso per l'angolo e pel suo supplemento. Nei problemi seguenti quando si nominerà un angolo d'una base per via d'una lettera, per esempio l'angolo B della base $ABCD$, s'intenderà sempre il supplemento dell'angolo ABC, ossia la deviazione del lato AB dal lato BC; appunto come nella Poligonometria piana. Non occorrerà poi mai d'impiegare altri angoli, che gli angoli piani delle basi opposte e parallele.

Problema XI.

Misurare la solidità d' un corpo, che ha due basi opposte ABCD, abcd *parallele cogli angoli tutti sporgentisi; tre facce laterali piane* ABba, BCcb, CDdc *poste comunque, e la quarta faccia laterale* ADda *o piana, o almen tale, che ogni sezione del corpo parallela alle basi si tagli con' essa in una linea retta.*

Fig. 99

Soluzione. Chiamando P l' altezza del corpo, ossia la distanza delle due basi parallele; sarà la sua solidità

$$= \tfrac{1}{6} P \,\text{sen.}\, B \left[AB\left(BC + \tfrac{1}{2} bc\right) + ab\left(bc + \tfrac{1}{2} BC\right)\right]$$
$$+ \tfrac{1}{6} P \,\text{sen.}\, C \left[BC\left(CD + \tfrac{1}{2} cd\right) + bc\left(cd + \tfrac{1}{2} CD\right)\right]$$
$$+ \tfrac{1}{6} P \,\text{sen.}\,(B + C)\left[AB\left(CD + \tfrac{1}{2} cd\right) + ab\left(cd + \tfrac{1}{2} CD\right)\right]$$

Scolio.

Si vede che questa soluzione appartiene anche al Probl. IX., nel quale la faccia $ADda$ si suppone piana.

Se l' angolo DCB fosse rientrante; basterà nella formola della solidità scrivere $-C$ in vece di C; e la formola così cangiata scioglierà anche il Problema X., nel quale la faccia $ADda$ si suppone piana.

Fig. 100

Problema XII.

Misurare la solidità d' un corpo, che ha due basi ABCDE, abcde *parallele, e le facce intorno ad esse piane poste comunque.*

Fig. 101

Soluzione 1. Si supponga il corpo diviso in due da una diagonale per esempio dalla ad,

che scorra lungo i due spigoli aA, dD stando sempre in un piano parallelo alle basi. La porzione $AEDdea$ essendo l'altezza $= P$; avrà per misura della sua solidità

$$\tfrac{1}{6} P \,\text{sen.}\, E[AE(ED + \tfrac{1}{2} ed) + ae(ed + \tfrac{1}{2} ED)]$$

l'altra porzione $ABCDdcba$ avrà la sua solidità espressa dalla formola del Problema XI.

$$\tfrac{1}{6} P \,\text{sen.}\, B[AB(BC + \tfrac{1}{2} bc) + ab(bc + \tfrac{1}{2} BC)]$$
$$+ \tfrac{1}{6} P \,\text{sen.}\, C[BC(CD + \tfrac{1}{2} cd) + bc(cd + \tfrac{1}{2} CD)]$$
$$+ \tfrac{1}{6} P \,\text{sen.}(B + C)[AB(CD + \tfrac{1}{2} cd) + ab(cd + \tfrac{1}{2} CD)]$$

Soluzione 2. Vedi la soluzione del Problema XIII.

Scolio.

Se ci fossero degli angoli rientranti; si dovrebbe scrivere il segno $-$ avanti la lettera, che esprime i loro supplementi.

Problema XIII.

Misurare la solidità di un corpo, che ha due basi parallele ABCDE, abcde, *e le facce intorno ad esse tutte piane, eccetto forse una per esempio la* AEea, *che è però tale che ogni sua sezione con un piano parallelo alle basi sia una retta*. Fig 101

Soluzione. Essendo l'altezza $= P$; sarà la solidità $=$

$$\frac{P}{6} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{sen.}\, B[AB(BC + \tfrac{1}{2} bc) + ab(bc + \tfrac{1}{2} BC)] \\ \text{sen.}\, C[BC(CD + \tfrac{1}{2} cd) + bc(cd + \tfrac{1}{2} CD)] \\ \text{sen.}\, D[CD(DE + \tfrac{1}{2} de) + cd(de + \tfrac{1}{2} DE)] \\ \text{sen.}(B + C)[AB(CD + \tfrac{1}{2} cd) + ab(cd + \tfrac{1}{2} CD)] \\ \text{sen.}(C + D)[BC(DE + \tfrac{1}{2} de) + bc(de + \tfrac{1}{2} DE)] \\ \text{sen.}(B + C + D)[AB(DE + \tfrac{1}{2} de) + ab(de + \tfrac{1}{2} DE)] \end{array} \right\}$$

Scolio I.

Se ci saranno degli angoli rientranti, si noteranno col segno negativo.

Scolio II.

Se due angoli vicini coincideranno; si annullerà nelle formole il lato che li congiunge.

Scolio III.

Da questi esempj apparisce la regola, che si deve tenere per ogni altro caso di maggior numero di angoli. Si confrontino le formole poste negli esempj antecedenti colle formole, che somministra la poligonometria per avere la superficie delle due basi parallele, e si rileverà facilmente la soluzione del seguente

Problema Generale.

Esprimere immediatamente la solidità di qualunque corpo, che abbia due basi parallele, e le facce laterali intorno ad esse basi tutte piane eccettuatane una al più, la quale però abbia anch' essa la condizione di avere una retta per comune sezione con qualunque piano parallelo alle basi.

Soluzione. Si trovi colla Poligonometria piana l'espressione dell' area delle basi per via dei lati e degli angoli omettendo il lato, che è nella faccia eccettuata, e i due angoli adjacenti.

Alla somma di queste due basi si aggiunga

la somma di altre due basi formate a parte dalle due prime col sostituire in ogni prodotto di due lati in vece del secondo lato preso nella stessa base la metà del lato analogo preso nell' altra base.

La somma delle quattro basi si moltiplichi per un terzo dell' altezza.

Scolio I.

Se tutte le facce laterali saranno piane ; si potrà per avere il calcolo più semplice supporre diviso il corpo in due parti dal moto di una diagonale che divida le basi parallele in due poligoni o di egual numero di lati, o colla differenza di un solo ; la quale diagonale scorra lungo i due spigoli che la tagliano stando sempre in piani paralleli alle basi. Allora si avranno due corpi della condizione del Problema Generale che avranno la faccia eccettuata comune. Si potranno adunque esprimere separatamente le due solidità, e la loro somma avrà un' espressione più semplice che se il corpo non fosse stato così diviso. Una regola simile è stata data pei poligoni piani.

Scolio II.

Questo Problema si può estendere ancora più generalmente a qualunque poliedro così.

1. Si supponga collocato il poliedro sopra una delle sue facce come base.

2. Si conduca un piano parallelo a questa base per tutti gli angoli solidi del poliedro.

In tal guisa si sarà diviso il poliedro in tanti altri, ciascuno de' quali avrà le condizioni di questo Problema Generale. Misurando dunque a parte la solidità di ciascuno di essi, e facendone la somma; si avrà la solidità di tutto il poliedro a superficie piane di qualunque figura egli sia.

FINE.

L' Ingegnere Sig. Giovanni Speroni ha notate le seguenti correzioni nel dimostrare da se le soluzioni di questi Problemi. Con esse finalmente non temerei di assicurare questo libro d' una totale esattezza nella parte importante del Calcolo.

Pag.	lin.	Errori	Correzioni
6	12	OA	CA
9	10	$\surd 2[(AB$ . . .	$\surd[2(AB$
13	20	ED	BD
18, e 19		tutte le X si devono cangiare in Z	
20	*penult.*	VDK . . .	VDE
25	*in marg.*	dove è il num. 57 va messo 57. 58.	
28	22	$-l.2PC$ . . .	$-l2-2l.PC$
31	19	triangolo . . .	rettangolo
34	12	ABC	A, B, C
36	7	BE	Be
	11	$\frac{zp.AB}{t}$	$\frac{2p.AB}{t}$
39	*penult.*	3, 141542 . .	3, 141592

2
C
D
B
A
JJ
B
Z
B
x
2J
c
Q